

Devoir surveillé du 15/03/2025

Durée : 3h30.

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.
La calculatrice n'est pas autorisée.*

Exercice 1

Les différentes questions sont indépendantes.

1. Calculer le développement limité de $x \mapsto \cos(x)^{\tan(x)}$ à l'ordre 3 en 0.
2. Calculer le développement limité de $x \mapsto \frac{\sin x}{e^x - 1}$ à l'ordre 2 en 0.
3. Déterminer la limite lorsque x tend vers 1 de $g(x) = \frac{\cos(2\pi x) - 1}{\ln(x) + 1 - x}$.

Exercice 2

On définit une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 \geq 0$ et pour tout $n \geq 1$:

$$u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}.$$

1. Montrer que pour tout entier n , $u_n \geq \sqrt{n}$. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
2. (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x} \leq \frac{1+x}{2}$.
 (b) En déduire que pour tout entier n , $u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}$, puis que $u_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^2)$.
 (c) Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n)$.
 (d) Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - \sqrt{n}$.
 (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
 (b) En déduire que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1)$.
4. (a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - u_{n-1})$.
 (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $1 + u_n - u_{n-1}$, puis que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = u_n - \sqrt{n} - \frac{1}{2}$.
 (a) Montrer que $u_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1)$.
 (b) En déduire que $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{8\sqrt{n}}$, et que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 3

On admettra dans la suite l'irrationalité de $\sqrt{7}$.

On note $\mathbb{Z}[\sqrt{7}] = \{a + b\sqrt{7}, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

Partie I. L'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$.

1. Prouver que pour tout élément x de $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{7}$.
L'élément $a - b\sqrt{7}$ est alors appelé le *conjugué de x* et noté \bar{x} .
2. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, muni de l'addition et de la multiplication usuelles des réels est un sous-anneau de \mathbb{R} . Est-ce un corps ?
3. Montrer que l'application $x \mapsto \bar{x}$ est un automorphisme d'anneau de $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$.
4. Pour $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, on appelle *norme de x* et on note $N(x)$ le réel $x\bar{x}$.
 - (a) Prouver que pour tout $(x, x') \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]^2$, $N(xx') = N(x)N(x')$.
 - (b) En déduire qu'un élément $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ si, et seulement si, $N(x) = 1$ ou $N(x) = -1$. Exprimer alors cet inverse en fonction de \bar{x} .

Partie II. Structure du groupe des inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ et équations de Pell-Fermat.

Dans la suite, on note G le groupe (multiplicatif) des inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, c'est-à-dire $G = \mathcal{U}(\mathbb{Z}[\sqrt{7}])$. Il est évident que 1 et -1 sont dans G .

5. Vérifier que $8 + 3\sqrt{7} \in G$, et en déduire que $G \neq \{-1, 1\}$.
6. On souhaite montrer que $G \cap]1, +\infty[$ possède un plus petit élément u .
 - (a) Soit $x = (a + b\sqrt{7}) \in G \cap]1, +\infty[$ tel que $N(x) = 1$. Justifier que $0 < \bar{x} < x$, puis montrer que $a \geq 1$ et $b \geq 1$.
 - (b) Montrer de manière analogue que si $x = (a + b\sqrt{7}) \in G \cap]1, +\infty[$ est tel que $N(x) = -1$, alors $a \geq 1$ et $b \geq 1$.
 - (c) Soit $M \in \mathbb{N}^*$. Déduire des questions précédentes que $G \cap]1, M]$ est fini.
 - (d) Conclure.
7. Soit $v \in G \cap]1, +\infty[$.
 - (a) Justifier qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k \leq v < u^{k+1}$.
 - (b) Montrer que si k est comme dans la question précédente, alors $v = u^k$.
 - (c) En déduire que $G \cap \mathbb{R}_+^* = \langle u \rangle = \{u^k, k \in \mathbb{Z}\}$.
8. Montrer que $f : \begin{matrix} \{-1, 1\} \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & G \\ (\varepsilon, k) & \longmapsto & \varepsilon u^k \end{matrix}$ est un isomorphisme de groupes, où $\{-1, 1\} \times \mathbb{Z}$ est muni de la structure de produit direct des deux groupes $(\{-1, 1\}, \times)$ et $(\mathbb{Z}, +)$.

9. Équations de Pell-Fermat.

- Montrer que l'équation $x^2 - 7y^2 = 1$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ possède une infinité de solutions. Donner deux telles solutions avec $x, y \in \mathbb{N}^*$.
- En admettant que $8 + 3\sqrt{7}$ est le plus petit élément de $G \cap]1, +\infty[$, déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^2 - 7y^2 = -1$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

Exercice 4 (Polynômes de Tchebychev et théorème de Block-Thielmann)

On appelle *suite commutante* toute suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui satisfait :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \deg(P_n) = n \\ \forall (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2, P_n \circ P_m = P_m \circ P_n \end{cases}$$

où \circ désigne la composition (des polynômes).

Partie I. Résultats préliminaires

- Montrer que la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est commutante.
- On note \mathcal{G} l'ensemble des polynômes de degré 1 de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que (\mathcal{G}, \circ) est un groupe. Que vaut l'inverse U^{-1} d'un polynôme $U = aX + b \in \mathcal{G}$ au sens de la composition ?
 - Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite commutante, et soit $U \in \mathbb{R}[X]$ de degré 1. Prouver que $(U \circ P_n \circ U^{-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est encore une suite commutante.

Partie II. Polynômes de Tchebychev (de première espèce)

On définit une famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ en posant $T_0 = 1$, $T_1 = X$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

- Calculer T_2, T_3 et T_4 .
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est de degré n et déterminer son coefficient dominant.
- Prouver que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
- Montrer que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite commutante.

Partie III. Étude du commutant de $X^2 + p$

Soit $p \in \mathbb{R}$ fixé. On note \mathcal{C}_p l'ensemble des polynômes non constants de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$P \circ (X^2 + p) = (X^2 + p) \circ P.$$

- Montrer que tout élément de \mathcal{C}_p est unitaire.
- On souhaite prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, \mathcal{C}_p contient au plus un polynôme de degré n . Soient donc P_1, P_2 deux polynômes de degré n de \mathcal{C}_p . En considérant le polynôme $P_1 \circ (X^2 + p) - P_2 \circ (X^2 + p)$, prouver que $P_1 = P_2$.

9. Montrer que si \mathcal{C}_p contient un polynôme de degré 3, alors $p = 0$ ou $p = -2$.
10. Prouver que $\mathcal{C}_0 = \{X^n, n \in \mathbb{N}^*\}$.
11. (a) Trouver un polynôme $V \in \mathbb{R}[X]$ de degré 1 tel que $V \circ (X^2 - 2) \circ V^{-1} = T_2$.
 (b) En déduire que $\mathcal{C}_{-2} = \{V^{-1} \circ T_n \circ V, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Partie IV. Théorème de Block-Thielmann

12. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré 2. On pose $U = aX + \frac{b}{2}$.
 Prouver que $U \circ P \circ U^{-1}$ est de la forme $X^2 + p$ pour un certain $p \in \mathbb{R}$.
13. Prouver enfin que les seules suites commutantes de $\mathbb{R}[X]$ sont les $(U \circ X^n \circ U^{-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et les $(U \circ T_n \circ U^{-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour U polynôme de degré 1.
-