DS3

Devoir surveillé du 14/12/2024

Durée : 3h30.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.
La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation géométrique donnée par l'écriture complexe suivante :

$$z \mapsto (1 + i\tan(\alpha))z - i\tan(\alpha), \quad \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

2. Calculer $I = \displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 5x + 7}$, puis $J = \displaystyle\int_1^3 \frac{x+1}{x^2-5x+7}\,\mathrm{d}x$. On donnera les résultats sous forme simplifiée.

3. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^e \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'un changement de variable.

4. Les parties de $\mathbb{R}$ suivantes sont-elles minorées, majorées ? Dans chaque cas, déterminer s'il y a lieu la borne inférieure, la borne supérieure, et dire s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.

$$A = \left\{ \frac{n}{mn+1},\ (m,n) \in \mathbb{N}^{*2} \right\}, \quad B = \left\{ \frac{n}{mn+1},\ (m,n) \in \mathbb{N}^2 \right\}.$$

Exercice 2 (Résolution d'une équation différentielle)

On s'intéresse ici à la résolution sur $I =]0, +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = (1+x^2)\ln(x). \qquad (E)$$

On notera (E_0) l'équation homogène associée.

Partie I. Calculs préliminaires

1. Donner une primitive de $f : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x(x^2+1)}$.

2. Donner une primitive de $g : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (1-x^2)\ln(x)$.

3. Donner une primitive de $h : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x\ln(x)$.

Partie II. Résolution de l'équation sans second membre

4. Montrer que $y_1 : x \mapsto x$ est solution de (E_0).

5. Soit $y : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, on pose $z : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{y(x)}{x}$.

   Montrer que y est solution de (E_0) si, et seulement si, z' est solution de l'équation différentielle $(E') : xu' + \dfrac{2}{1+x^2}u = 0$.

6. Résoudre l'équation différentielle (E').

7. Donner l'ensemble des solutions de (E_0).

Partie III. Résolution de l'équation

8. On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y_P : x \mapsto \lambda(x)x + \mu(x)(x^2-1)$ où λ et μ sont deux fonctions deux fois dérivables de I dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in I,\ x\lambda'(x) + (x^2-1)\mu'(x) = 0.$$

   (a) Exprimer y_P' et y_P'' en fonction de λ et μ.

   (b) Montrer que y_P est solution de (E) si, et seulement si, pour tout $x \in I$, $\lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (x^2+1)\ln x$.

   (c) Déterminer λ' et μ' à l'aide des questions précédentes puis en déduire une solution particulière de (E).

9. Donner l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 3 (Étude d'une équation fonctionnelle)

Soit $p \in \mathbb{N}$ un entier fixé. Dans toute la suite, pour $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on note $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

Le but de l'exercice est de prouver qu'il existe $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^2(n) = n+p$ si, et seulement si, p est pair.

1. Dans cette question, on suppose que p est pair. Donner un exemple d'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^2(n) = n + p$.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose $p \neq 0$, et on suppose qu'il existe $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^2(n) = n + p$, et on considère une telle fonction f.

2. Montrer que f est injective et qu'elle ne possède pas de point fixe.

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Donner la valeur de $f^{2k}(n)$.

4. En déduire que pour tout $k \geq 2$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f^k(n) \geq p$.

5. Soit $n \in [\![0, p-1]\!]$. On note respectivement q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de $f(n)$ par p, de sorte que $f(n) = qp + r$, avec $q \in \mathbb{N}$ et $r \in [\![0, p-1]\!]$.

   En utilisant les questions précédentes, prouver que si $q \neq 0$, alors $f(r) = n$.

6. En déduire que tout élément de $[\![0, p-1]\!]$ possède soit une image par f dans $[\![0, p-1]\!]$, soit un antécédent par f dans $[\![0, p-1]\!]$.

7. On définit une relation binaire notée $\sim$ sur $[\![0, p-1]\!]$ de la manière suivante :

$$\forall a, b \in [\![0, p-1]\!],\ a \sim b \ \Leftrightarrow\ (a = b \textbf{ ou } f(a) = b \textbf{ ou } f(b) = a)\,.$$

Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $[\![0, p-1]\!]$.

8. Prouver que toute classe d'équivalence de la relation $\sim$ est de cardinal égal à deux.

9. En déduire que p est pair.

Exercice 4 (Arithmétique de la suite de Fibonacci)

Dans tout le problème, on note $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.

Partie I. Première propriétés de la suite de Fibonacci

1. Montrer que $(F_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} \geq n$. En déduire la limite de $(F_n)_n$.

Partie II. Arithmétique de la suite de Fibonacci

3. (a) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.

4. (a) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $F_{n+p} = F_{n-1}F_p + F_n F_{p+1}$.
   Indication : on pourra procéder par récurrence sur p.
   (b) En déduire que pour $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $F_{n+p} \wedge F_n = F_n \wedge F_p$.
   (c) Montrer alors que pour tout $(n, p, k) \in \mathbb{N}^3$, $F_{n+kp} \wedge F_p = F_n \wedge F_p$.

5. En utilisant l'algorithme d'Euclide, prouver que pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $F_n \wedge F_p = F_{n\wedge p}$.
   En déduire que si p divise n, alors F_p divise F_n.

6. Montrer que si F_n est premier, alors soit $n = 4$, soit n est un nombre premier impair.

Partie III. Puissances de 2 dans la suite de Fibonacci

Dans cette partie, on cherche pour quelles valeurs de n le $n^{\text{ème}}$ nombre de Fibonacci est une puissance de 2, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $F_n = 2^k$.

7. Déterminer tous les entiers naturels n pour lesquels F_n est une puissance de 2 inférieure ou égale à 8.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $k > 3$ tel que $F_n = 2^k$.

   (a) À l'aide de la question 5, montrer que n est un multiple de 6. On note alors m l'entier tel que $n = 6m$.
   (b) Montrer que F_m est une puissance de 2 . En notant que $F_3 = 2$, sur le même principe qu'à la question précédente, prouver que 3 divise m.

(c) Prouver que F_n est divisible par F_9, et aboutir à une contradiction.

9. Donner la liste de toutes les valeurs de n pour lesquelles F_n est une puissance de 2 .
