DS2

Devoir surveillé du 09/11/2024

Durée : 4h.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.
La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1

1. Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y - 2z &= 0 \\ x + 2my - 4mz &= 1 - 2m \\ mx + y - mz &= 1. \end{cases}$$

On précisera l'ensemble des solutions obtenu.

2. Résoudre l'équation (E) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 + (-1 + 9i)z - 8 - 8i = 0. \qquad (E)$$

On pourra utiliser que $\sqrt{48^2 + 14^2} = 50$.

Exercice 2

On considère dans cet exercice les fonctions f et g définies par :

$$f : x \mapsto \frac{1}{2}\arctan(\mathrm{sh}(x)) \text{ et } g : x \mapsto \arctan\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{1 + \mathrm{ch}(x)}\right).$$

L'objectif de cet exercice est de montrer que $f = g$ de deux manières différentes.

1. Rappeler le domaine de définition de tan, qu'on notera $\mathscr{D}$ dans la suite.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, rappeler la relation entre $\mathrm{ch}^2(x)$ et $\mathrm{sh}^2(x)$.
3. Dans cette question on montre le résultat voulu via les dérivées.
   (a) Montrer que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
   (b) Calculer f' et g'.
   (c) En déduire le résultat voulu.
4. Dans cette question on montre le résultat voulu en utilisant la fonction tan.
   (a) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$, $2f(x) \in \mathscr{D}$ et calculer $\tan(2f(x))$.
   (b) En étudiant la fonction $h : x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{1 + \mathrm{ch}(x)}$, montrer que h est à valeurs dans $]-1, 1[$.
   (c) Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer que $2g(x) \in \mathscr{D}$ puis que $\tan(2g(x)) = \mathrm{sh}(x)$.
   (d) En déduire le résultat voulu.
5. En appliquant l'égalité $f = g$ au point $\dfrac{1}{2}\ln(3)$, la tangente de quel angle peut-on calculer ? On simplifiera le résultat.

Exercice 3

On se propose de résoudre l'équation suivante :

$$x^3 - 12x - 8 = 0. \tag{E}$$

1. Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 12x - 8$. En déduire le nombre de solutions réelles de l'équation (E).
2. (a) Linéariser $\cos^3(\theta)$. Plus précisément, exprimer $\cos^3(\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\cos(3\theta)$.
   (b) On cherche les solutions de (E) sous la forme $x = a\cos(\theta)$ (avec a et θ réels). Trouver un réel a positif pour que l'équation (E) se ramène à la résolution de $\cos(3\theta) =$ constante.
   (c) Conclure.
3. Dans cette question, on applique une autre méthode permettant de retrouver les solutions de l'équation (E). On cherche une solution de (E) sous la forme $x = u + v$, avec u et v complexes.
   (a) Montrer qu'en fixant le produit $uv = 4$, on doit avoir $u^3 + v^3 = 8$.
   (b) En déduire les valeurs possibles pour u^3 et v^3 (on mettra ces valeurs sous forme trigonométrique).
   (c) Déterminer les couples (u, v) correspondants, puis les solutions de l'équation (E).

Exercice 4

Soit $\omega = \exp\left(i\dfrac{2\pi}{17}\right)$. On pose $p = (1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)$.

1. Montrer que $\omega \neq 0$, $\omega^2 \neq 1$, et que $(1-\omega^2)\,p = 1 - \omega^{16}$.
2. En déduire que $p = -\dfrac{1}{\omega(1+\omega)}$, puis que $\overline{p} = -\dfrac{\omega^2}{(1+\omega)}$.
3. Vérifier que $\mathrm{Re}(p) = -\dfrac{\cos(3\pi/17)}{2\cos(\pi/17)}$, puis que $|p| = \dfrac{1}{2\cos(\pi/17)}$.
4. Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$. En déduire que : $\quad \mathrm{Re}(p) = -\dfrac{1}{2} + 2\sin^2(\pi/17)$.
5. En déduire l'encadrement suivant : $\quad -\dfrac{1}{2} < \mathrm{Re}(p) < -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi^2}{144}$.

Exercice 5 (Approximations rationnelles de th et irrationalité de e)

1. Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$, vérifiant $f(0) = g(0) = 0$ et telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |f'(x)| \leq g'(x).$$
Étudier le signe des fonctions $f + g$ et $g - f$ sur $\mathbb{R}_+$, et en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|f(x)| \leq g(x)$.

Dans la suite, on définit deux suites $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}_+$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ \Big(P_0(x) = 0, P_1(x) = x \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2}(x) = (2n+3)P_{n+1}(x) + x^2 P_n(x)\Big).$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ \Big(Q_0(x) = 1, Q_1(x) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, Q_{n+2}(x) = (2n+3)Q_{n+1}(x) + x^2 Q_n(x)\Big).$$

2. Déterminer les fonctions P_2 et Q_2.

3. (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les coefficients des fonctions polynomiales P_n et Q_n sont des entiers naturels.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $P_n(0)$ et $Q_n(0)$. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $Q_n(x) \geq \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = Q_n(x)\,\mathrm{sh}(x) - P_n(x)\,\mathrm{ch}(x)$.
On constate qu'alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_{n+2}(x) = (2n+3)f_{n+1}(x) + x^2 f_n(x)$.

4. (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est dérivable.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \geq 0$, $f'_{n+1}(x) = -x f_n(x)$.

   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est strictement monotone sur $\mathbb{R}_+$ et que : $\forall x > 0$, $|f_n(x)| > 0$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$, on note $g_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{2^n n!}\,\mathrm{sh}(x)$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \geq 0$, $x g_n(x) \leq g'_{n+1}(x)$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \geq 0$, $|f_n(x)| \leq g_n(x)$, puis que pour tout $x > 0$,
$$0 < \left|\mathrm{th}(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}\right| \leq \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

   (c) En utilisant ce qui précède, déterminer un rationnel r tel que $|\mathrm{th}(1) - r| \leq 10^{-2}$.

6. Le but de cette question est de prouver que le réel $\mathrm{th}(1)$ est irrationnel. On raisonne par l'absurde, en supposant que $\mathrm{th}(1) \in \mathbb{Q}$, et on considère deux entiers $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\mathrm{th}(1) = \dfrac{p}{q}$.

   (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < |pQ_n(1) - qP_n(1)| \leq \dfrac{q}{2^n n!}$.

   (b) En déduire une contradiction.

   (c) Prouver, à l'aide de ce qui précède, que e est irrationnel.

7. Question subsidiaire (à n'aborder que si vous avez très bien réussi tout le reste).

   Prouver que pour tout rationnel strictement positif r, $\ln(r) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow r = 1$.
