DS2

Correction du devoir surveillé

Exercice 1

1. Soit $m \in \mathbb{R}$. On applique l'algorithme de Gauss à la matrice augmentée du système :

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2m & -4m & 1-2m \\ m & 1 & -m & a \end{array}\right) \underset{\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - mL_1 \end{cases}}{\overset{\mathscr{L}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2m-1 & -4m+2 & 1-2m \\ 0 & 1-m & m & 1 \end{array}\right)$$

- **Si** $m \neq \dfrac{1}{2}$ **:**

$$(A|B) \underset{L_2 \leftarrow \frac{L_2}{2m-1}}{\overset{\mathscr{L}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1-m & m & 1 \end{array}\right)$$
$$\underset{\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (1-m)L_2 \end{cases}}{\overset{\mathscr{L}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2-m & 2-m \end{array}\right)$$

- **Si de plus,** $m \neq 2$ **:**

$$(A|B) \underset{L_3 \leftarrow \frac{L_3}{2-m}}{\overset{\mathscr{L}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3}{\overset{\mathscr{L}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ainsi, si $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$, le système est équivalent à $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$.

L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\mathscr{S}_m = \{(1,1,1)\}.}$

- **Si** $m = 2$ **:** en repartant de la 4-ème matrice :

$$(A|B) \overset{\mathscr{L}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le système est donc équivalent à : $\begin{cases} x = 1 \\ y - 2z = -1 \end{cases}$.

L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S}_2 = \{(1, -1+2z, z), z \in \mathbb{R}\}.}$

- **Si** $m = \frac{1}{2}$ **:** en repartant de la deuxième matrice, on trouve :

$$(A|B) \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\overset{\mathscr{L}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow 2L_2}{\overset{\mathscr{L}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\overset{\mathscr{L}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le système est donc équivalent à : $\begin{cases} x - 3z = -2 \\ y + z = 2 \end{cases}$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S}_{\frac{1}{2}} = \{(-2+3z, 2-z, z), z \in \mathbb{R}\}.}$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Le discriminant de l'équation $z^2 + (-1+9i)z - 8 - 8i = 0$ est :

$$\Delta = (-1+9i)^2 + 4(8+8i) = -48 + 14i.$$

On cherche les racines carrées de $-48+14i$ sous la forme $u = x + iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi, $u^2 = -48 + 14i$. On obtient alors :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -48 & \text{égalité des parties réelles} \\ 2xy = 14 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{48^2 + 14^2} \end{cases}$$

Ainsi, : $\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 49 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 7 \end{cases}$. De plus, $2xy = 14 > 0$, ainsi x et y sont de même signe. Finalement les racines carrées de $-48+14i$ sont $\pm(1+7i)$.

Les solutions de (E) sont donc $\boxed{\dfrac{1-9i-1-7i}{2} = -8i \text{ et } \dfrac{1-9i+1+7i}{2} = 1-i.}$

Exercice 2

1. La fonction tan est définie en tout réel x tel que $\cos(x) \neq 0$, soit en tout $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. Ainsi, $\boxed{\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}.}$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1.}$

3. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions qui le sont, et de même pour g en tant que composée et quotient (le dénominateur ne s'annulant pas puisque ch est à valeurs positives) de fonctions qui le sont.

   (b) Calculons, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\mathrm{sh}'(x)\frac{1}{1+\mathrm{sh}^2(x)} = \frac{\mathrm{ch}(x)}{2(\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x))} = \frac{\mathrm{ch}(x)}{2\mathrm{ch}^2(x)} \boxed{= \frac{1}{2\mathrm{ch}(x)}}$$

   et

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\right)\frac{1}{1+\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\right)^2} = \frac{\mathrm{ch}(x)(1+\mathrm{ch}(x)) - \mathrm{sh}^2(x)}{(1+\mathrm{ch}(x))^2} \times \frac{(1+\mathrm{ch}(x))^2}{(1+\mathrm{ch}(x))^2 + \mathrm{sh}^2(x)} \\ &= \frac{\mathrm{ch}(x) + \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{1 + 2\mathrm{ch}(x) + \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x)} = \frac{\mathrm{ch}(x)+1}{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) + 2\mathrm{ch}(x) + \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x)} \\ &= \frac{\mathrm{ch}(x)+1}{2\mathrm{ch}(x) + 2\mathrm{ch}^2(x)} \boxed{= \frac{1}{2\mathrm{ch}(x)}.} \end{aligned}$$

   (c) On a vu dans la question précédente que $f'(x) = g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui donne $(f-g)'(x) = 0$. La fonction $f-g$ est donc constante sur $\mathbb{R}$, égale à $(f-g)(0) = f(0) - g(0) = 0$. On a donc $\boxed{f(x) = g(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.}$

4. (a) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $2f(x) = \arctan(\mathrm{sh}(x)) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi $2f(x) \in \mathscr{D}$ et $\tan(2f(x))$ est bien défini. De plus :

$$\tan(2f(x)) = \tan(\arctan(\mathrm{sh}(x))) \boxed{= \mathrm{sh}(x).}$$

   (b) La fonction h est dérivable comme quotient de fonctions qui le sont (le dénominateur ne s'annulant pas), et pour $x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x) = \frac{\mathrm{ch}(x)(1+\mathrm{ch}(x)) - \mathrm{sh}^2(x)}{(1+\mathrm{ch}(x))^2} = \frac{\mathrm{ch}(x) + \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{(1+\mathrm{ch}(x))^2} = \frac{1+\mathrm{ch}(x)}{(1+\mathrm{ch}(x))^2} = \frac{1}{1+\mathrm{ch}(x)} > 0.$$

Donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$h(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)} = \frac{2\mathrm{sh}(x)}{2+2\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{2+e^x+e^{-x}} = \frac{1+e^{-2x}}{1+2e^{-x}+e^{-2x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

et de même (ou par imparité de h), $h(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -1$. Comme h est strictement croissante, on en déduit que $\boxed{\text{pour } x \in \mathbb{R},\ -1 < h(x) < 1.}$

(c) D'après la question précédente, pour $x \in \mathbb{R}$, $-1 < h(x) < 1$. Comme arctan est strictement croissante, ceci implique $-\frac{\pi}{4} < \arctan(h(x)) < \frac{\pi}{4}$ puis $2g(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi $2g(x) \in \mathscr{D}$ et $\tan(2g(x))$ est bien défini. Calculons :

$$\begin{aligned}
\tan(2g(x)) &= \frac{2\tan(g(x))}{1-\tan^2(g(x))} = \frac{2\tan(\arctan(h(x)))}{1-\tan^2(\arctan(h(x)))} = \frac{2h(x)}{1-h(x)^2} \\
&= \frac{\frac{2\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}}{1-\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\right)^2} = \frac{2\mathrm{sh}(x)(1+\mathrm{ch}(x))}{(1+\mathrm{ch}(x))^2-\mathrm{sh}^2(x)} = \frac{2\mathrm{sh}(x)(1+\mathrm{ch}(x))}{1+2\mathrm{ch}(x)+\mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)} \\
&= \frac{2\mathrm{sh}(x)(1+\mathrm{ch}(x))}{2+2\mathrm{ch}(x)} \boxed{= \mathrm{sh}(x).}
\end{aligned}$$

(d) Les questions précédentes montrent que pour $x \in \mathbb{R}$, $\tan(2f(x)) = \tan(2g(x))$, donc $2f(x) \equiv 2g(x)\ [\pi]$. Or on a vu à la question 4.(a) que $2f(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et en 4.(b) que $2g(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi, $2f(x) = 2g(x)$, et $\boxed{f(x) = g(x).}$

5. Calculons :

$$\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}\ln(3)} + e^{-\frac{1}{2}\ln(3)}}{2} = \frac{3^{1/2}+3^{-1/2}}{2} = \frac{3+1}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

et de même $\mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. L'égalité $f(x) = g(x)$ en $x = \frac{1}{2}\ln(3)$ donne donc :

$$\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}\right) \quad \text{soit encore} \quad \frac{\pi}{12} = \arctan\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right).$$

On en déduit que $\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2+\sqrt{3}}.}$

Exercice 3

1. La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale. Elle est de plus dérivable sur cet intervalle, et $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On obtient le tableau de variation suivant pour f :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	8	$\searrow$	-24	$\nearrow$	$+\infty$

On calcule les limites de f en $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(1-\frac{12}{x^2}-\frac{8}{x^3}\right) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{12}{x^2}-\frac{8}{x^3}\right) = -\infty$$

D'après le tableau de variation, la fonction f est continue et strictement croissante sur $]-\infty,-2]$. Elle réalise donc une bijection de $]-\infty,-2]$ sur $]-\infty,8]$. Puisque $0 \in]-\infty,8]$, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-\infty,-2[$.

On montre de même que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-2,2[$, et une unique dans l'intervalle $]2,+\infty[$.

Il y a donc $\boxed{\text{exactement 3 solutions réelles à l'équation } (E).}$

2. (a) On a pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\cos^3(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(e^{3i\cdot\cdot}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}+e^{-3i\theta})\\ &= \frac{1}{8}\left(2\cos(3\theta)+3\cos(\theta)\right) = \frac{1}{4}\cos(3\theta)+\frac{3}{4}\cos(\theta).\end{aligned}$$

(b) On cherche les solutions de (E) sous la forme $x = a\cos(\theta)$ (avec a et θ réels). Calculons :

$$\begin{aligned}f(a\cos(\theta)) &= a^3\cos^3(\theta) - 12a\cos(\theta) - 8 = a^3\left(\frac{1}{4}\cos(3\theta)+\frac{3}{4}\cos(\theta)\right) - 12a\cos(\theta) - 8\\ &= \frac{a^3}{4}\cos(3\theta) + \left(\frac{3a^3}{4} - 12a\right)\cos(\theta) - 8.\end{aligned}$$

Pour $a=4$, $\dfrac{3a^3}{4} - 12a = 0$, et $\boxed{4\cos(\theta) \text{ est solution de } (E) \text{ si, et seulement si, } 16\cos(3\theta)=8.}$

(c) Il s'agit à présent de résoudre l'équation $\cos(3\theta) = \frac{1}{2}$. Ceci équivaut à $3\theta \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $3\theta \equiv -\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$, soit encore à $\theta \equiv \dfrac{\pi}{9}\left[\frac{2\pi}{3}\right]$ ou $\theta \equiv -\dfrac{\pi}{9}\left[\frac{2\pi}{3}\right]$.
Ainsi : $\theta \equiv \dfrac{\pi}{9}[2\pi]$, $\theta \equiv \dfrac{7\pi}{9}[2\pi]$, $\theta \equiv \dfrac{13\pi}{9}[2\pi]$ ou $\theta \equiv -\dfrac{\pi}{9}[2\pi]$, $\theta \equiv \dfrac{5\pi}{9}[2\pi]$, $\theta \equiv \dfrac{11\pi}{9}[2\pi]$
Les valeurs possibles pour $4\cos(\theta)$ sont donc $4\cos(\pi/9)$ $(= 4\cos(-\pi/9))$, $4\cos(5\pi/9)$ $(= 4\cos(13\pi/9))$ et $4\cos(7\pi/9)$ $(= 4\cos(11\pi/9))$.

On obtient ainsi 3 solutions de l'équation (E), qui sont $4\cos(\pi/9)$, $4\cos(5\pi/9)$ et $4\cos(7\pi/9)$. Puisque (E) admet exactement 3 racines réelles par la question 1., l'ensemble des solutions de l'équation (E) est donc :

$$\boxed{\{4\cos(\pi/9), 4\cos(5\pi/9), 4\cos(7\pi/9)\}.}$$

3. (a) Soit $x = u+v$ une solution de (E), avec $u, v \in \mathbb{C}$. En remplaçant dans (E) :

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 12u - 12v - 8 = 0$$

soit encore :

$$u^3 + v^3 + 3uv(u+v) - 12(u+v) - 8 = 0.$$

Supposons que $uv = 4$, on obtient en remplaçant : $\boxed{u^3+v^3=8.}$

(b) On suppose toujours que $uv=4$. Alors $u^3+v^3=8$ et $u^3v^3=64$. Donc u^3 et v^3 sont solutions de l'équation $z^2-8z+64=0$.

Le discriminant associé vaut -3×64, et les racines sont donc $4 \pm 4i\sqrt{3} = 8e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$. Ainsi, les valeurs possibles pour u^3 et v^3 sont :

$$\boxed{\begin{cases} u^3 = 8e^{i\frac{\pi}{3}} \\ v^3 = 8e^{-i\frac{\pi}{3}} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u^3 = 8e^{-i\frac{\pi}{3}} \\ v^3 = 8e^{i\frac{\pi}{3}} \end{cases}.}$$

(c) On détermine les racines 3-èmes de $8e^{i\frac{\pi}{3}}$. Une racine 3-ème étant $2e^{i\frac{\pi}{9}}$, on obtient alors toutes les autres en multipliant par les racines troisièmes de l'unité : $2e^{i\frac{\pi}{9}}, 2e^{i\frac{7\pi}{9}}, 2e^{i\frac{13\pi}{9}}$.

En utilisant que $uv = 4$, on obtient 6 couples possibles pour (u, v) :

$$(2e^{i\frac{\pi}{9}}, 2e^{-i\frac{\pi}{9}}), \quad (2e^{i\frac{7\pi}{9}}, 2e^{-i\frac{7\pi}{9}}), \quad (2e^{i\frac{13\pi}{9}}, 2e^{-i\frac{13\pi}{9}})$$
$$(2e^{-i\frac{\pi}{9}}, 2e^{i\frac{\pi}{9}}), \quad (2e^{-i\frac{7\pi}{9}}, 2e^{i\frac{7\pi}{9}}), \quad (2e^{-i\frac{13\pi}{9}}, 2e^{i\frac{13\pi}{9}}).$$

Les trois solutions $x = u + v$ de (E) correspondantes sont :

$$\boxed{4\cos\left(\frac{\pi}{9}\right), \quad 4\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right), \quad 4\cos\left(\frac{13\pi}{9}\right) = 4\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right).}$$

On obtient de cette manière 3 solutions de l'équation (E). Puisqu'il y en a exactement trois par la question 1., on les a toutes. On retrouve ainsi les solutions obtenues en 2.(c).

Exercice 4

1. Tout d'abord $\omega \neq 0$ puisque $|\omega| = 1$, et $\omega^2 = \exp\left(\frac{4i\pi}{17}\right) \neq 1$ car $\frac{4\pi}{17} \not\equiv 0[2\pi]$.

   Calculons :

$$\begin{aligned}(1-\omega^2)p &= (1-\omega^2)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8) = (1-\omega^4)(1+\omega^4)(1+\omega^8)\\ &= (1-\omega^8)(1+\omega^8) \boxed{= 1-\omega^{16}.}\end{aligned}$$

2. Puisque $\omega^2 \neq 1$, on obtient $p = \frac{1-\omega^{16}}{1-\omega^2}$.

   Remarquons d'autre part que ω est une racine 17-ème de l'unité, de sorte que :

$$\omega^{17} = 1, \quad \text{et donc} \quad \omega^{16} = \frac{1}{\omega}$$

   puisque $\omega \neq 0$. Ainsi :

$$p = \frac{1-\frac{1}{\omega}}{1-\omega^2} = \frac{\omega - 1}{\omega(1-\omega)(1+\omega)} = -\frac{1}{\omega(1+\omega)}.$$

   Rappelons que pour un nombre complexe z de module 1 :

$$z \times \overline{z} = 1, \quad \text{et donc} \quad \overline{z} = \frac{1}{z}.$$

   D'où ici :

$$\overline{p} = -\frac{1}{\overline{\omega}(1+\overline{\omega})} = -\frac{\omega}{1+\frac{1}{\omega}} = -\frac{\omega^2}{\omega+1}.$$

3. Calculons :

$$p = -\frac{e^{-\frac{2i\pi}{14}}}{1+e^{\frac{2i\pi}{17}}} = -\frac{e^{-\frac{2i\pi}{14}}}{e^{\frac{i\pi}{17}}(e^{\frac{-i\pi}{17}} + e^{\frac{i\pi}{17}})} = -\frac{e^{-\frac{3i\pi}{14}}}{2\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)}$$

   et donc :

$$\mathrm{Re}(p) = \mathrm{Re}\left(-\frac{e^{-\frac{3i\pi}{14}}}{2\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)}\right) \boxed{= -\frac{\cos(3\pi/17)}{2\cos(\pi/17)}.}$$

   On obtient également :

$$|p| = \left|-\frac{e^{-\frac{3i\pi}{14}}}{2\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)}\right| \underbrace{=}_{\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)>0} \frac{|e^{-\frac{3i\pi}{14}}|}{2\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)} \boxed{\frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)}.}$$

4. Par la formule de Moivre :

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \mathrm{Re}\left(e^{3i\theta}\right) = \mathrm{Re}\left((\cos(\theta)+i\sin(\theta))^3\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\cos(\theta)^3 + 3i\cos(\theta)^2\sin(\theta) - 3\cos(\theta)\sin(\theta)^2 - i\sin(\theta)^3\right)\\ &= \cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta)\sin(\theta)^2 = \cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta)(1-\cos(\theta)^2)\\ &= 4\cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta).\end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(p) &= -\frac{\cos(3\pi/17)}{2\cos(\pi/17)} = \frac{-4\cos(\pi/17)^3 + 3\cos(\pi/17)}{2\cos(\pi/17)} = -2\cos(\pi/17)^2 + \frac{3}{2}\\ &= -2(1-\sin(\pi/17)^2) + \frac{3}{2}\,\boxed{= -\frac{1}{2} + 2\sin^2(\pi/17).}\end{aligned}$$

5. Puisque $\frac{\pi}{17} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin(2\pi/17) > 0$ et donc $\mathrm{Re}(p) > -\frac{1}{2}$.

D'autre part, l'inégalité classique $|\sin(x)| \leq |x|$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$ donne ici :

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{17}\right)\right| \leq \frac{\pi}{17}, \qquad \text{et donc} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{17}\right)^2 \leq \frac{\pi^2}{17^2}$$

par croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$. D'où :

$$\mathrm{Re}(p) \leq -\frac{1}{2} + \frac{2\pi^2}{17^2} < -\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{144}$$

car $2 \times 144 = 288 < 17^2 = 289$. Ainsi :

$$\boxed{-\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(p) < -\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{144}.}$$

Exercice 5 (Approximations rationnelles de th et irrationalité de e)

1. Puisque f et g sont dérivables, il en est de même des deux fonctions $f+g$ et $g-f$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \qquad \text{et} \qquad (g-f)'(x) = g'(x) - f'(x).$$

Mais puisque $|f'(x)| \leq g'(x)$, alors $f'(x) \leq |f'(x)| \leq g'(x)$, si bien que $g'(x) - f'(x) \geq 0$. Et de même, $-f'(x) \leq |f'(x)| \leq g'(x)$ et donc $g'(x) + f'(x) \geq 0$. Ainsi, $f+g$ et $g-f$ sont toutes deux croissantes sur $\mathbb{R}_+$, et puisqu'elles s'annulent en 0 , $\boxed{\text{elles sont positives sur } \mathbb{R}_+.}$

Et donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leq g(x)$ et $-f(x) \leq g(x)$. Et par conséquent $\boxed{|f(x)| \leq g(x).}$

2. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$P_2(x) = P_{0+2}(x) = (2\times 0 + 3)P_{0+1}(x) + x^2 P_0(x)\,\boxed{= 3x}$$

et

$$Q_2(x) = 2Q_1(x) + x^2 Q_0(x)\,\boxed{= 3 + x^2.}$$

3. (a) Procédons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}^*$ en notant $\mathscr{P}(n)$: « les coefficients de P_n et de Q_n sont des entiers naturels ».

Init. Étant données les expressions de P_0, Q_0, P_1 et Q_1 données dans l'énoncé, il est évident que $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ soient vraies.
Soit alors $p \in \mathbb{N}$ tel que P_n et P_{n+1} soient de degré inférieur ou égal à p, et notons $a_0, \dots, a_p$ (resp. $b_0, \dots, b_p$) les coefficients (dans $\mathbb{N}$ par hypothèse de récurrence) de P_n (respectivement P_{n+1}) de sorte que pour tout $x \geq 0$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k \quad \text{et} \quad P_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{p} b_k x^k.$$

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= (2n+3)\sum_{k=0}^{p} b_k x^k + x^2 \sum_{k=0}^{p} a_k x^k \\ &= \underbrace{(2n+3)b_0}_{\in\mathbb{N}} + \underbrace{(2n+3)b_1}_{\in\mathbb{N}} x + \sum_{k=2}^{p} \underbrace{((2n+3)b_k + a_{k-2})}_{\in\mathbb{N}} x^k. \end{aligned}$$

Et donc P_{n+2} est bien polynomiale (ce qui avait été admis, mais est désormais prouvé), à coefficients dans $\mathbb{N}$.
On prouve exactement sur le même principe que Q_{n+2} est à coefficients entiers naturels.

Par principe de récurrence double, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ P_n \text{ et } Q_n \text{ sont à coefficients dans } \mathbb{N}.}$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P_{n+2}(0) = (2n+3)P_{n+1}(0) + 0^2 P_n(0) = (2n+3)P_{n+1}(0)$. Puisque $P_0(0) = P_1(0) = 0$, une récurrence immédiate prouve que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ P_n(0) = 0.}$

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_{n+2}(0) = (2n+3)Q_{n+1}(0)$. Et donc $Q_0(0) = Q_1(0) = 1$, $Q_2(0) = 3$, $Q_3(0) = 5Q_2(0) = 5 \times 3$, $Q_4(0) = 7Q_3(0) = 7 \times 5 \times 3$.
Autrement dit, il semblerait que $Q_n(0)$ soit le produit de tous les impairs de 1 à $2n-1$. Et un calcul classique donne :

$$1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) = \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k)\prod_{k=1}^{n}(2k+1)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{(2n)!}{2^n \prod_{k=1}^{n} k} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Prouvons donc par récurrence sur n que pour $n \in \mathbb{N}$ que $Q_n(0) = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$.

Init. Pour $n = 0$, on a $\frac{0!}{2^0 0!} = 1 = Q_0(1)$, pour $n = 1$, on a $\frac{2!}{2^1 1!} = 1$.

Hér. Soit $n \geq 1$ tel que $Q_n(0) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$. Alors :

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(0) &= (2(n-1)+3)Q_n(0) = (2n+1)\frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{2n+2}{2n+2}\frac{(2n+1)!}{2^n n!} \\ &= \frac{1}{2(n+1)}\frac{(2n+2)!}{2^n n!} = \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!}. \end{aligned}$$

Par principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, Q_n(0) = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}.}$

Reste à noter que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n(0)$ est le coefficient constant de Q_n. Notons donc p le degré de Q_n, et soient $a_0, \dots, a_p$ les coefficients de Q_n, que nous savons entiers naturels. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\boxed{Q_n(x) = a_0 + \underbrace{\sum_{k=1}^{p} a_k x^k}_{\geq 0} \geq a_0 = Q_n(0) = \frac{(2n)!}{2^n n!}.}$$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Les fonctions P_n et Q_n sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$ car polynomiales, et il est connu que ch et sh sont également dérivables.

Donc par produit, les fonctions Q_n sh et P_n ch sont dérivables, et donc par sommes de fonctions dérivables, $\boxed{f_n \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+.}$

(b) Procédons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$, en notant $\mathscr{P}(n)$: « $\forall x \geq 0,\ f'_{n+1}(x) = -xf_n(x)$ ».

Init. Pour $n = 0$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f_1(x) = Q_1(x)\operatorname{sh}(x) - P_1(x)\operatorname{ch}(x) = \operatorname{sh}(x) - x\operatorname{ch}(x)$$

et donc pour tout $x \geq 0$, $f'_1(x) = \operatorname{ch}(x) - x\operatorname{sh}(x) - \operatorname{ch}(x) = -x\operatorname{sh}(x)$.

Mais par ailleurs, pour tout $x \geq 0$, $f_0(x) = \operatorname{sh}(x) - 0\operatorname{ch}(x)$, et donc $f'_1(x) = -xf_0(x)$.

Pour $n = 1$, on a $f_2(x) = (3 + x^2)\operatorname{sh}(x) - 3x\operatorname{ch}(x)$ et donc

$$f'_2(x) = 2x\operatorname{sh}(x) + \left(3 + x^2\right)\operatorname{ch}(x) - 3\operatorname{ch}(x) - 3x\operatorname{sh}(x) = x^2\operatorname{ch}(x) - x\operatorname{sh}(x) = -xf_1(x).$$

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ soient vraies. Alors pour $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} f'_{n+2}(x) &= (2n+3)f'_{n+1}(x) + 2xf_n(x) + x^2 f'_n(x) = -(2n+3)xf_n(x) + 2xf_n(x) - x^3 f_{n-1}(x) \\ &= -x\left((2n+1)f_n(x) + x^2 f_{n-1}(x)\right) = -xf_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Par principe de récurrence double, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et tout } x \geq 0,\ f'_{n+1}(x) = -xf_n(x).}$

(c) Notons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = Q_n(0)\operatorname{sh}(0) - P_n(0)\operatorname{ch}(0) = -P_n(0) = 0$. Prouvons tout d'un coup, en montrant par récurrence simple sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété : « f_n est strictement monotone sur $\mathbb{R}_+$, croissante si n est pair et décroissante si n est impair, et pour tout $x > 0$, $|f_n(x)| > 0$ ».

Init. Puisque $f_0 = \operatorname{sh}$, f_0 est strictement croissante.
Et puisque $f_0(0) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_0(x) > 0$ et donc $|f_0(x)| > 0$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que f_n soit strictement monotone sur $\mathbb{R}_+$, croissante si n pair et décroissante sinon, et vérifiant : $\forall x > 0, |f_n(x)| > 0$.

Si n est pair, puisque $f_n(0) = 0$ et que f_n est strictement croissante, $f_n(x) > 0$ pour tout $x > 0$. Ainsi $f_{n+1}(x) = -xf_n(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, et f_{n+1} est strictement décroissante. Puisque $f_{n+1}(0) = 0$, $f_{n+1}(x) < 0$ pour tout $x > 0$, et $|f_{n+1}(x)| > 0$.

Si n est impair, alors f_n est strictement décroissante et vérifie $f_n(0) = 0$, si bien que pour tout $x > 0$, $f_n(x) < 0$. Alors $f'_{n+1}(x) = -xf_n(x) > 0$ pour tout $x > 0$, et f_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme elle s'annule en 0, $f_{n+1}(x) > 0$ pour tout $x > 0$, et donc $|f_{n+1}(x)| > 0$.

Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{f_n \text{ est strictement monotone sur } \mathbb{R}_+}$ et $\boxed{\text{pour tout } x > 0,\ |f_n(x)| > 0.}$

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} g'_{n+1}(x) &= \frac{(2n+2)x^{2n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}\operatorname{sh}(x) + \frac{x^{2n+2}}{2^{n+1}(n+1)!}\operatorname{ch}(x) \\ &= \frac{2(n+1)x^{2n+1}}{2 \cdot 2^n (n+1)n!}\operatorname{sh}(x) + \underbrace{\frac{x^{2n+2}}{2^{n+1}(n+1)!}\operatorname{ch}(x)}_{\geq 0} \\ &\boxed{\geq \frac{x^{2n+1}}{2^n n!}\operatorname{sh}(x) = xg_n(x).} \end{aligned}$$

(b) Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|f_n(x)| \leq g_n(x)$.

Init. Pour $n = 0$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_0(x) = \operatorname{sh}(x) = g_0(x)$. Puisque $|f_0(x)| = f_0(x)$, la récurrence est initialisée.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|f_n(x)| \leq g_n(x)$.
Alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|f'_{n+1}(x)| = |-xf_n(x)| \leq x\,|f_n(x)| \leq xg_n(x) \leq g'_{n+1}(x)$.
Puisque par ailleurs $f_{n+1}(0) = -P_{n+1}(0)\operatorname{ch}(0) = 0$ et $g_{n+1}(0) = 0$, la question 1 s'applique : pour tout $x \geq 0$, $|f_{n+1}(x)| \leq g_{n+1}(x)$.

Par principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et pour tout } x \geq 0,\ |f_n(x)| \leq g_n(x).}$

On en déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \geq 0$,

$$|Q_n(x)\operatorname{sh}(x) - P_n(x)\operatorname{ch}(x)| \leq \frac{x^{2n}}{2^n n!}\operatorname{sh}(x).$$

En divisant par $\frac{Q_n(x)}{\operatorname{ch}(x)} > 0$ (en notant que $Q_n(x) > 0$ par la question 3.(b)), on obtient :

$$\left|\operatorname{th}(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}\right| \leq \frac{x^{2n}}{2^n n!}\frac{\operatorname{th}(x)}{Q_n(x)}.$$

Par ailleurs, pour $x \geq 0$, $\operatorname{th}(x) \leq 1$ et $Q_n(x) \geq \frac{(2n)!}{2^n n!}$, si bien que $\frac{1}{Q_n(x)} \leq \frac{2^n n!}{(2n)!}$, et donc :

$$\boxed{\left|\operatorname{th}(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}\right| \leq \frac{x^{2n}}{(2n)!}.}$$

Enfin, pour $x > 0$, puisque $|f_n(x)| > 0$, on a bien $0 < \left|\operatorname{th}(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}\right|$.

(c) En prenant $x = 1$ dans l'inégalité précédente, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

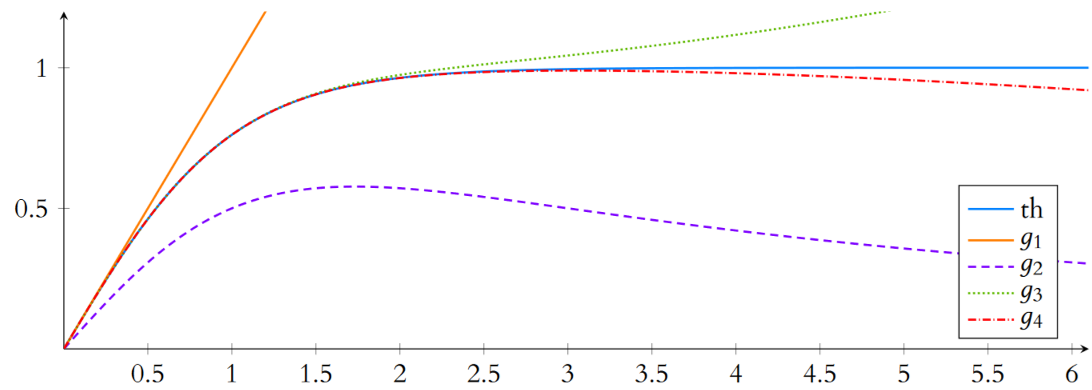
$$\left|\operatorname{th}(1) - \frac{P_n(1)}{Q_n(1)}\right| \leq \frac{1}{(2n)!}.$$

En prenant $n = 3$, $\frac{1}{(2n)!} = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720} < 10^{-2}$, et donc $\left|\operatorname{th}(1) - \frac{P_3(1)}{Q_3(1)}\right| < 10^{-2}$.

Après calculs, on obtient $P_3(1) = 28$ et $Q_3(1) = 37$, si bien que $\left|\operatorname{th}(1) - \dfrac{28}{37}\right| < 10^{-2}$, et $\boxed{\dfrac{28}{37} \text{ est un rationnel approchant th}(1) \text{ à moins de } 10^{-2} \text{ près.}}$

Remarque. Nous venons donc de construire une suite de fonctions rationnelles (c'est-à-dire des quotients de fonctions polynomiales) qui réalisent une bonne approximation de la fonction th. Un des intérêts est notamment le calcul de valeurs approchées de th, puisqu'il est bien plus aisé de calculer avec des polynômes qu'avec des exponentielles.

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les premières fonctions $g_n = \frac{P_n}{Q_n}$ sur l'intervalle $[0, 6]$. On constate qu'elles semblent approcher de mieux en mieux la fonction th.



6. (a) Repartons du résultat de la question 5.(b), pour $x = 1$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$0 < |Q_n(1)\,\mathrm{sh}(1) - P_n(1)\,\mathrm{ch}(1)| \leq \frac{\mathrm{sh}(1)}{2^n n!}$$
et donc
$$0 < |Q_n(1)\,\mathrm{th}(1) - P_n(1)| \leq \frac{\mathrm{th}(1)}{2^n n!} \leq \frac{1}{2^n n!}.$$
Puisque $\mathrm{th}(1) = \frac{p}{q}$, en multipliant l'inégalité qui précède par q, il vient
$$\boxed{0 < |pQ_n(1) - qP_n(1)| < \frac{q}{2^n n!}.}$$
(b) Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ un entier strictement plus grand que q, de sorte que $2^{n_0} n_0! \geq n_0 > q$. On a donc $0 < \dfrac{q}{2^{n_0} n_0!} < 1$. Mais alors, pour ce même n_0 :
$$0 < |pQ_{n_0}(1) - qP_{n_0}(1)| < 1.$$
Mais par la question 3., $P_{n_0}(1)$ et $Q_{n_0}(1)$ sont des entiers, si bien que $|pQ_{n_0}(1) - qP_{n_0}(1)|$ est aussi un entier. Nous obtenons ici un entier strictement compris entre 0 et 1 , ce qui est impossible.
Ainsi, $\boxed{\mathrm{th}(1) \text{ est irrationnel.}}$
(c) Notons que $\mathrm{th}(1) = \dfrac{e - e^{-1}}{e + e^{-1}}$. Si e était rationnel, il en serait de même de son inverse e^{-1}. Et donc par somme et quotient de rationnels, $\mathrm{th}(1)$ serait encore rationnel, et nous venons de prouver que ce n'est pas le cas. Donc $\boxed{e \text{ est irrationnel.}}$

7. Commençons par adapter le raisonnement précédent pour prouver que pour r rationnel non nul, $\mathrm{th}(r)$ n'est pas rationnel. Par imparité de th, il suffit de le prouver pour r rationnel strictement positif. Soit donc r un tel rationnel, et soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $r = \frac{a}{b}$.

Supposons par l'absurde que $\mathrm{th}(r) = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. Alors comme précédemment, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|pQ_n(r) - qP_n(r)| \leq \frac{q}{2^n n!}.$$
Une récurrence double prouverait que P_n et Q_n sont de degré au plus n. Et donc si on note $c_0, \dots, c_n$ les coefficients de P_n, alors
$$P_n(r) = \sum_{k=0}^n c_k r^k = \sum_{k=0}^n c_k \frac{a^k}{b^k} = \frac{1}{b^n} \underbrace{\sum_{k=0}^n c_k a^k b^{n-k}}_{\in \mathbb{N}}.$$
Autrement dit, $b^n P_n(r) \in \mathbb{N}$. Et de même, $b^n Q_n(r) \in \mathbb{N}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$|pb^n Q_n(r) - b^n q P_n(r)| \leq q\frac{b^n}{2^n n!}.$$
Prouvons alors que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{b^n}{2^n n!} = 0$. Commençons par noter qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{b}{2} \leq n_0$. Et alors pour $n > n_0$:
$$0 \leq \frac{b^n}{2^n n!} = \frac{b^{n_0}}{2^{n_0} n_0!} \underbrace{\frac{b}{2\,(n_0+1)}}_{\leq 1} \underbrace{\frac{b}{2\,(n_0+2)}}_{\leq 1} \cdots \underbrace{\frac{b}{2(n-1)}}_{\leq 1} \frac{b}{2n} \leq \frac{b^{n_0}}{2^{n_0} n_0}! \frac{b}{2n}.$$

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{b}{2n} = 0$, il suit $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{b^n}{2^n n!} = 0$ par le théorème des gendarmes.

Soit donc N tel que $\dfrac{b^N}{2^N N!} < \frac{1}{q}$. Alors $0 < \left| pb^N Q_N(r) - qb^N p_N(r) \right| < 1$. Mais puisque $\left| pb^N Q_N(r) - qb^N p_N(r) \right| \in \mathbb{N}$, c'est absurde. Et donc $\operatorname{th}(r)$ n'est pas rationnel.

On en déduit que e^r n'est pas rationnel, faute de quoi on aurait $\operatorname{th}(r) = \frac{e^r - \frac{1}{e^r}}{e^r + \frac{1}{e^r}} \in \mathbb{Q}$. Ainsi, pour tout rationnel r non nul, e^r n'est pas rationnel.

Supposons par l'absurde qu'il existe un rationnel r strictement positif et différent de 1 tel que $\ln(r)$ soit rationnel. Alors $\ln(r) \neq 0$ si bien que par ce qui précède, $e^{\ln(r)} \notin \mathbb{Q}$. Mais $e^{\ln(r)} = r$, est rationnel. Donc $\ln(r)$ n'est pas rationnel. Et puisqu'inversement, il est clair que $\ln(1) = 0 \in \mathbb{Q}$, on a bien prouvé que $\boxed{\text{pour tout rationnel strictement positif, } \ln(r) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow r = 1.}$