DM9

Correction du devoir maison

Exercice 1 (Étude d'une suite récurrente)

Partie I. Convergence de la suite (u_n)

1. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, et dont le dénominateur ne s'annule pas. Et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\boxed{f'(x) = \frac{(x+1)^2 - 2x(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{1-x}{(1+x)^3}.}$$

(b) La dérivée de f s'annule en $x = 1$, est strictement positive sur $[0, 1[$ et strictement négative sur $]1, +\infty[$. D'où le tableau de variations suivant de f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

Pour la limite de f en $+\infty$, on remarque que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(c) Calculons, pour $x \in \mathbb{R}_+$:

$$x - f(x) = \frac{x\left[(1+x)^2 - 1\right]}{(1+x)^2} = \frac{x^2(2+x)}{(1+x)^2} \geq 0.$$

Ainsi, $\boxed{f(x) \leq x \text{ avec égalité si, et seulement si, } x = 0.}$

2. (a) On montre par récurrence la propriété $\mathscr{P}(n)$: « u_n est bien définie et $0 < u_n$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I Puisque $u_0 = a \in \mathbb{R}_+^*$, la propriété est vraie pour $n = 0$.

H Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété $\mathscr{P}(n)$ vraie.
Puisque $u_n > 0$ par hypothèse de récurrence, $u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{u_n}{(1+u_n)^2}$ est bien définie est strictement positif. D'où la propriété $\mathscr{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, $\boxed{u_n \text{ est bien définie et } 0 < u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

(b) Le tableau de variation de f assure que $f(x) \leq \frac{1}{4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Ainsi $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_n = f(u_{n-1}) \leq \tfrac{1}{4}}$ puisque $u_{n-1} \in \mathbb{R}_+$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par les questions 2.(a) et 1.(c), $u_n \in \mathbb{R}_+$ et $u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n$. Donc $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante.}}$

La suite (u_n) est décroissante, minorée par 0. Elle converge donc vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}_+$ par théorème de limite monotone.

En passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient $\ell = f(\ell)$ (par continuité de f), et donc $\ell = 0$ par la question 1.(c). Ainsi, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

Partie II. Propriétés de la série harmonique

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons :

$$h_{2n} - h_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$
$$\geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = (2n - (n+1))\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, $\boxed{h_{2n} - h_n \geq \frac{1}{2}.}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$h_{n+1} - h_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} \geq 0.$$

Donc $\boxed{(h_n)_{n\geq 1} \text{ est une suite croissante.}}$

Par le théorème de la limite monotone, soit la suite $(h_n)_{n\geq 1}$ converge vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$, soit elle diverge vers $+\infty$.

Par l'absurde, supposons que $(h_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Alors $(h_{2n})_{n\geq 1}$ converge aussi vers ℓ en tant que suite extraite d'une suite convergente. Mais en passant à la limite dans l'inégalité obtenue à la question précédente, on obtiendrait $0 \geq \frac{1}{2}$. D'où une contradiction.

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (h_n)_{n\geq 1} \text{ diverge vers } +\infty.}$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons :

$$a_{n+1} - a_n = h_{n+1} - \ln(n+2) - h_n + \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \geq 0$$

par l'inégalité classique $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x > -1$. Ainsi, la suite (a_n) est croissante. On montre de même que la suite (b_n) est décroissante. Calculons enfin :

$$b_n - a_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, $\boxed{\text{les suites } (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ sont adjacentes.}}$

(b) Par le théorème des suites adjacentes, $\boxed{\text{les suites } (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ ont une limite finie commune, notée } \gamma.}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, on dispose de l'encadrement :

$$a_n \leq \gamma \leq b_n, \quad \text{d'où} \quad \boxed{0 \leq \gamma - a_n \leq b_n - a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).}$$

Pour $n = 100$, et toujours avec l'inégalité bien connue sur le logarithme :

$$0 \leq \gamma - a_{100} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{100}\right) \leq \frac{1}{100}.$$

Ainsi, $\boxed{a_{100} \text{ est une valeur approchée de } \gamma \text{ à } 10^{-2} \text{ près par défaut.}}$

5. (a) L'égalité $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \gamma$ se récrit $b_n = \gamma + (b_n - \gamma) = \gamma + o(1)$, soit encore :

$$\boxed{h_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).}$$

En particulier, pour tout $n \geq 2$:

$$\frac{h_n}{\ln(n)} = 1 + \frac{\gamma}{\ln(n)} + o\left(\frac{1}{\ln(n)}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Remarque. La suite (h_n) est appelée *série harmonique.* On vient ici d'en obtenir son développement asymptotique à deux termes, et donc aussi son équivalent en ne conservant que le premier terme de ce développement.

(b) On peut reprendre à l'identique les arguments donnés à la question précédente avec la suite $(a_{n-1})_{n\geq 2}$ en lieu et place de $(b_n)_{n\geq 1}$. On obtient :

$$\boxed{h_{n-1} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1) \text{ et } h_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

Partie III. Développement asymptotique de la suite (u_n)

6. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons :

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{(u_n+1)^2}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{(u_n+1)^2 - 1}{u_n} \boxed{= u_n + 2.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$, l'égalité est immédiate. Supposons $n \geq 1$, et sommons les égalités de la questions précédentes pour $k = 0, \dots, n-1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} = \sum_{k=0}^{n-1}(u_k + 2).$$

D'où par télescopage :

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} = 2n + \sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

qui se récrit :

$$\boxed{\frac{1}{u_n} = \frac{1}{a} + 2n + \sum_{k=0}^{n-1} u_k.}$$

(c) Procédons par récurrence.

$\boxed{\mathbf{I}}$ Pour $n = 1$, on a montré à la question 2.(b) que $u_1 \leq \frac{1}{4} \leq 1$. D'où la propriété au rang $n = 1$.

$\boxed{\mathbf{H}}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $u_n \leq \frac{1}{n}$. Puisque f est croissante sur l'intervalle $[0,1]$, il vient :

$$u_{n+1} = f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n\left(\frac{1}{n}+1\right)^2} = \frac{n}{(n+1)^2} \leq \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1}.$$

D'où la propriété au rang $n+1$.

Par principe de récurrence, $\boxed{u_n \leq \frac{1}{n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$

(d) Soit $n \geq 2$. D'une part :

$$\frac{1}{u_n} = \underbrace{\frac{1}{a}}_{\geq 0} + 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{u_k}_{\geq 0} \boxed{\geq 2n.}$$

D'autre part :

$$\frac{1}{u_n} = \frac{1}{a} + 2n + u_0 + \sum_{k=1}^{n-1} u_k \boxed{\leq \frac{1}{a} + 2n + a + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{a} + 2n + a + h_{n-1}.}$$

(e) Toujours pour $n \geq 2$, on tire de l'inégalité précédente :

$$1 \leq \frac{1}{2nu_n} \leq 1 + \frac{1}{2na} + \frac{a}{2n} + \frac{h_{n-1}}{2n}.$$

Par la question 5.(b), $\frac{h_{n-1}}{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Ainsi, $1 + \frac{1}{2na} + \frac{a}{2n} + \frac{h_{n-1}}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, et par théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2nu_n}$ existe et vaut 1.

Cette dernière limite se récrit $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.}$

7. (a) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim\limits_{k\to+\infty} 2ku_k = 1$, par définition de la limite, il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $k \geq k_0$:

$$\boxed{\frac{1-\varepsilon}{2k} \leq u_k \leq \frac{1+\varepsilon}{2k}.}$$

(b) Soit $n \geq k_0$. Sommons les inégalités précédentes pour $k = k_0, \dots, n$:

$$(1-\varepsilon)\sum_{k=k_0}^{n} \frac{1}{2k} \leq \sum_{k=k_0}^{n} u_k \leq (1+\varepsilon)\sum_{k=k_0}^{n} \frac{1}{2k}.$$

Nous venons d'établir, en revenant à la définition de la limite, que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=k_0}^{n} u_k}{\sum\limits_{k=k_0}^{n} \frac{1}{2k}} = 1$. En d'autres termes, $\boxed{\sum\limits_{k=k_0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum\limits_{k=k_0}^{n} \frac{1}{2k}.}$

Enfin, pour tout $n \geq k_0$:

$$\sum_{k=k_0}^{n} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}(h_n - h_{k_0-1}) = \frac{1}{2}(\ln(n) + \underbrace{\gamma + o(1) - h_{k_0-1}}_{=o(\ln(n))}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln(n).$$

Et donc $\boxed{\sum\limits_{k=k_0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln(n).}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On procède de même :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=k_0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{k_0-1} u_k = \frac{1}{2}\ln(n) + o(\ln(n)) + \underbrace{\sum_{k=0}^{k_0-1} u_k}_{=o(\ln(n))} = \frac{1}{2}\ln(n) + o(\ln(n)).$$

Ainsi, $\boxed{\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln(n).}$

8. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question 6.(b) :

$$\frac{1}{u_n} = 2n + \sum_{k=0}^{n} u_k - u_n + \frac{1}{a}$$

Par la question précédente, $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}\ln(n) + o(\ln(n))$, et par la question 6.(e), $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n} = o(\ln(n))$. Comme de plus $\frac{1}{a} = o(\ln(n))$, il vient :

$$\boxed{\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 2n + \frac{1}{2}\ln(n) + o(\ln(n)).}$$

(b) Par la question précédente :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2n + \frac{1}{2}\ln(n) + o(\ln(n))} = \frac{1}{2n}\frac{1}{1 + \left[\frac{\ln(n)}{4n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right]}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{4n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) = 0$, il résulte du développement limité en 0 à l'ordre 1 de $u \mapsto \frac{1}{1+u}$ que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{\ln(n)}{4n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right) \boxed{= \frac{1}{2n} - \frac{\ln(n)}{8n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right).}$$

Exercice 2 (Polynômes de Bernstein et théorème de Weierstrass)

Partie I. Fonctions uniformément continues et théorème de Heine

1. Supposons $f : I \to \mathbb{R}$ uniformément continue sur I. Soit $a \in I$ et soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est uniformément continue, il existe $\eta > 0$ tel que :
$$\forall (x,y) \in I^2,\ |x-y| < \eta\ \Rightarrow\ |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$
Ainsi, pour tout $x \in I$:
$$|x-a| < \eta\ \Rightarrow\ |f(x)-f(a)| < \varepsilon.$$
Donc f est continue en a. Ceci étant valable pour tout $a \in I$, $\boxed{f \text{ est continue sur } I.}$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par hypothèse, il existe $(x_n, y_n) \in I^2$ tel que :
$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$
D'où $\boxed{\text{l'existence de deux telles suites } (x_n)_{n\geq 1} \text{ et } (y_n)_{n\geq 1} \text{ à valeurs dans } I}$

(b) Puisque (x_n) est une suite bornée (I étant un segment), on peut en extraire une sous-suite convergente : $\boxed{\text{il existe une extractrice } \varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^* \text{ et un réel } c \in I \text{ tels que } \lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = c.}$

Par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| < \frac{1}{\varphi(n)}.$$
Puisque $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ est strictement croissante, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\varphi(n)} = 0$. Par théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}$ existe et vaut 0. Et comme $\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = c$, il suit que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)} = c.}$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \geq \varepsilon.$$
Mais puisque f est continue, $\lim_{n\to+\infty} |f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| = |f(c) - f(c)| = 0$. Par passage à la limite dans les inégalités, il en résulte $0 \geq \varepsilon$. D'où une contradiction.

On a donc démontré le *théorème de Heine* : si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur un **segment** $[a,b]$, alors elle est uniformément continue sur $[a,b]$.

Partie II. Polynômes de Bernstein

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0,n]\!]$. Par opération sur le degré d'un polynôme :
$$\deg(B_{n,k}) = \deg(X^k) + \deg((1-X)^{n-k}) = k + (n-k)\ \boxed{= n.}$$
De plus, $B_{n,k}$ est scindé, $\boxed{\text{ses racines sont 0 et 1, de multiplicités respectives } k \text{ et } (n-k).}$

4. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Supposons qu'il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n), (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que :
$$P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k B_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} \mu_k B_{n,k}. \tag{$*$}$$
Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Puisque 0 est racine de multiplicité k exactement de $B_{n,k}$:
$$B_{n,k}(0) = \cdots = B_{n,k}^{(k-1)}(0) = 0 \text{ et } B_{n,k}^{(k)}(0) \neq 0.$$
En évaluant $(*)$ en 0, on obtient donc :
$$\lambda_0 B_{n,0}(0) = \mu_0 B_{n,0}(0).$$
Puisque $B_{n,0}(0) = 0$, il vient que $\lambda_0 = \mu_0$. Ainsi :
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k B_{n,k} = \sum_{k=1}^{n} \mu_k B_{n,k}$$

Dérivons cette expression, puis évaluons-là en 0 :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k B'_{n,k}(0) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k B'_{n,k}(0), \quad \text{qui se récrit} \quad \lambda_1 B'_{n,1}(0) = \mu_1 B'_{n,1}(0).$$

Puisque $B'_{n,1}(0) \neq 0$, il vient que $\lambda_1 = \mu_1$. On peut poursuivre ainsi en dérivant successivement et en évaluant en 0. De proche en proche, on obtient $\lambda_2 = \mu_2$, puis $\lambda_3 = \mu_3$, jusqu'à $\lambda_n = \mu_n$.

Ainsi, $\boxed{\text{un tel } (n+1)\text{-uplet } (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\text{, s'il existe, est unique.}}$

(b) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Par la formule du binôme :

$$\begin{aligned}
X^k = X^k(X + (1-X))^{n-k} &= X^k \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} X^j (1-X)^{n-k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} X^{j+k}(1-X)^{n-k-j} = \sum_{j=0}^{n-k} \frac{\binom{n-k}{j}}{\binom{n}{j+k}} B_{n,j+k} \\
&= \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(n-k)! \times (j+k)! \times (n-j-k)!}{j! \times (n-k-j)! \times n!} B_{n,j+k} \\
&= \frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(j+k)!}{j! \times k!} B_{n,j+k} = \frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{j+k}{k} B_{n,j+k} \\
&\boxed{= \frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} B_{n,j}.}
\end{aligned}$$

(c) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$. Par la question précédente :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} B_{n,j} = \sum_{j=0}^{n} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{j} \frac{\binom{j}{k}}{\binom{n}{k}} a_k \right)}_{\lambda_j} B_{n,j}.$$

D'où $\boxed{\text{l'existence de } (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tel que } P = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j B_{n,j}.}$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^{n} B_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = (X + (1-X))^n \boxed{= 1.}$$

De même si $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k B_{n,k} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} &= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} X^k (1-X)^{n-k} \\
&= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} X^{k+1} (1-X)^{n-1-k} = nX(X + (1-X))^{n-1} \boxed{= nX.}
\end{aligned}$$

Et cette égalité est encore valable si $n = 0$. Enfin si $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k(k-1) B_{n,k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} &= \sum_{k=2}^{n} n(n-1) \binom{n-2}{k-2} X^k (1-X)^{n-k} \\
&= n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} X^{k+2} (1-X)^{n-2-k} = n(n-1) X^2 (X + (1-X))^{n-2} \\
&\boxed{= n(n-1)X^2.}
\end{aligned}$$

Et cette égalité est là aussi valable lorsque $n = 0$ ou 1.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k-nX)^2 B_{n,k} &= \sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k} - 2nX\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k} + n^2X^2\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left[k(k-1)+k\right]B_{n,k} - 2n^2X^2 + n^2X^2\\ &= n(n-1)X^2 + nX - n^2X^2 = -nX^2 + nX\\ &\boxed{= nX(1-X).}\end{aligned}$$

Partie III. Approximation uniforme d'une fonction continue

7. Soit $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$f(x) - \left[B_n(f)\right](x) = f(x)\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x) \boxed{= \sum_{k=0}^{n}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) B_{n,k}(x).}$$

8. (a) Pour tout $k \in A_x$, $\left|x - \frac{k}{n}\right| < \eta$ et par continuité uniforme de f :

$$\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| < \varepsilon.$$

Dès lors :

$$\sum_{k\in A_x}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| B_{n,k}(x) \leq \sum_{k\in A_x}\varepsilon B_{n,k}(x) \leq \sum_{k\in [\![0,n]\!]}\varepsilon B_{n,k}(x) \boxed{= \varepsilon.}$$

Remarque. L'inégalité stricte n'est pas forcément nécessaire pour la suite (la définition de la limite pouvant s'écrire avec une inégalité stricte ou large), et on pourrait de fait ne pas s'embêter ici. Mais elle est demandée par l'énoncé. Tentons de la justifier :

- L'inégalité est bien stricte si $A_x = \emptyset$ car cela donne alors $0 < \varepsilon$. De même, si $A_x \neq \emptyset$ et $x \neq 0$ ou 1, $B_{n,k}(x) \neq 0$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, et la première inégalité ci-dessus est bien stricte.
- Si $x = 0$, alors $0 \in A_x$ et :

$$\left|f(0) - f\left(\frac{0}{n}\right)\right| B_{n,k}(0) = 0 < \varepsilon \underbrace{B_{n,0}(0)}_{\neq 0}.$$

Et donc l'inégalité est bien stricte. On procède de même pour $x = 1$.

(b) Soit $k \in B_x$. Par définition de B_x, $\left|x - \frac{k}{n}\right| \geq \eta$ et donc :

$$\boxed{\eta^2\sum_{k\in B_x} B_{n,k}(x) \leq \sum_{k\in B_x}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x).}$$

D'autre part :

$$\sum_{k\in B_x}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x) = \frac{1}{n^2}\sum_{k\in B_x}(nx-k)^2 B_{n,k}(x) \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}(nx-k)^2 B_{n,k}(x) \leq \frac{1}{n}x(1-x)$$

par la question 6. Enfin, grâce à l'inégalité classique[1] $x(1-x) \leq \dfrac{1}{4}$, on obtient :

$$\boxed{\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}(nx-k)^2 B_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4n}.}$$

[1]Qu'on retrouvera par étude de fonction, ou en remarquant que la fonction polynomiale $x \mapsto x(1-x)$ est de degré 2, avec 0 et 1 pour racines et -1 pour coefficient dominant, et donc atteint son maximum en $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ qui vaut $\frac{1}{4}$

(c) Par l'inégalité triangulaire :

$$\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq |f(x)| + \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \|f\|_\infty + \|f\|_\infty = 2\|f\|_\infty.$$

Ainsi, à l'aide de la question précédente :

$$\boxed{\sum_{k \in B_x} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| B_{n,k}(x) \leq 2\|f\|_\infty \sum_{k \in B_x} B_{n,k}(x) \leq \frac{\|f\|_\infty}{2n\eta^2}.}$$

(d) Par la question 7 et l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |f(x) - [B_n(f)](x)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) B_{n,k}(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| B_{n,k}(x) \\ &= \sum_{k \in A_x} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| B_{n,k}(x) + \sum_{k \in B_x} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| B_{n,k}(x). \end{aligned}$$

Par les questions 8.(a) et 8.(c) :

$$|f(x) - [B_n(f)](x)| < \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\eta^2}.$$

Cette majoration **ne dépend pas** de x. Ainsi, $\varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\eta^2}$ est un majorant de $\{|f(x) - [B_n(f)](x)|, x \in [0,1]\}$. Par comparaison d'un majorant au plus petit d'entre eux :

$$\boxed{\|f - B_n(f)\|_\infty \leq \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\eta^2}.}$$

Remarque. Ici aussi, on aurait pu se contenter de l'inégalité large, puisque la définition de limite l'autorise. Mais l'énoncé exige une inégalité stricte. Pour l'obtenir, utilisons le théorème des bornes atteintes : $x \mapsto |f(x) - [B_n(f)](x)|$ est une fonction continue sur le segment $[0,1]$. Elle est donc bornée et atteint ses bornes, de sorte qu'il existe $x_0 \in I$ tel que :

$$\|f - B_n(f)\|_\infty = |f(x_0) - [B_n(f)](x_0)| < \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\eta^2}.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\|f\|_\infty}{2n\eta^2} = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\frac{\|f\|_\infty}{2n\eta^2} \leq \varepsilon$.

Ainsi, pour tout $n \geq N$, on obtient :

$$\|f - B_n(f)\|_\infty < 2\varepsilon.$$

D'où le résultat voulu, qui se récrit $\boxed{\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \|f - B_n(f)\|_\infty = 0.}$