DM5

Correction du devoir maison

I. Intégrales de Wallis

1. On effectue le changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - x$ (qui est bien de classe $\mathscr{C}^1$). Lorsque $x : 0 \to \frac{\pi}{2}$, $t : \frac{\pi}{2} \to 0$. D'autre part, $\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t$. D'où :

$$\boxed{W_n = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t.}$$

2. On a $W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t \boxed{= \frac{\pi}{2}}$ et $W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \boxed{= 1}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{n+1}(x) - \cos^n(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)(\cos(x) - 1)\,\mathrm{d}x \leq 0$$

puisque pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \cos(x) \leq 1$. La suite $\boxed{(W_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc décroissante.}}$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \cos^n(x)$. On obtient $W_n \geq 0$ par positivité de l'intégrale.

La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée : $\boxed{\text{elle converge par théorème de limite monotone.}}$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto \cos(x)^n$ est **continue**, **positive** sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et non identiquement nulle puisque $\cos(0)^n = 1 \neq 0$. Par stricte positivité de l'intégrale, $\boxed{W_n \neq 0.}$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Effectuons une intégration par parties dans $W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \times \cos^{n+1}(x)\,\mathrm{d}x$:

$$\begin{array}{c|ccc}
+ & \boxed{\cos^{n+1}(x)} & \searrow & \cos(x) \\
- & -(n+1)\sin(x)\cos(x)^n & \xleftarrow{\int} & \boxed{-\sin(x)}
\end{array} \qquad \boxed{\text{fonctions } \mathscr{C}^1}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
W_{n+2} &= \cancel{\Big[-\cos(x)^{n+1}\sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}} - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^2\cos(x)^n\,\mathrm{d}x \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(x)^2)\cos(x)^n\,\mathrm{d}x \\
&= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}
\end{aligned}$$

par linéarité de l'intégrale. Ainsi, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, et donc $\boxed{W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n.}$

6. Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+1)W_nW_{n+1}$. Alors
$$u_{n+1} = (n+2)W_{n+1}W_{n+2} = (n+2)\frac{n+1}{n+2}W_nW_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n = u_n.$$
La suite $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc constante, égale à } u_0 = W_0W_1 = \frac{\pi}{2}.}$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par décroissance de la suite (W_n) :
$$W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n.$$
Puisque $W_n > 0$ (d'après les questions 2. et 3.), on en déduit que :
$$\boxed{\frac{n+2}{n+1} = \frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1}$$
avec la question 4.

8. Tout d'abord, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n}$ existe et vaut 1.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 6. :
$$\frac{\pi}{2} = (n+1)W_{n+1}W_n = \frac{n+1}{n} \times \frac{W_{n+1}}{W_n} \times nW_n^2$$
ce qu'on peut récrire encore :
$$nW_n^2 = \frac{\pi}{2}\frac{n}{n+1}\frac{W_n}{W_{n+1}} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\frac{W_n}{W_{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{\frac{\pi}{2}.}$$
Enfin, puisque $W_n \geq 0$ et que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$:
$$\sqrt{n}W_n = \sqrt{nW_n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{\sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$$

9. Montrons ce résultat par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.

Init. Pour $p = 0$, $W_0 = \frac{\pi}{2} = \frac{0!}{2^0(0!)^2} \times \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1 = \frac{2^0(0!)^2}{1!}$. D'où la propriété au rang $p = 0$.

Hér. soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang p, et donc les égalités pour W_{2p} et W_{2p+1}.

Calculons :
$$\begin{aligned} W_{2p+2} &= \frac{2p+1}{2p+2}W_{2p} \quad \text{par la question 5} \\ &= \frac{2p+1}{2p+2}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} \quad \text{par hyp. de réc.} \\ &= \frac{(2p+2)(2p+1)}{(2p+2)^2}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}((p+1)!)^2}\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$
On peut procéder de même pour W_{2p+3}, ou utiliser la question 6 :
$$W_{2p+3} = \frac{1}{(2p+3)W_{2p+2}}\frac{\pi}{2} = \frac{2^{2p+2}((p+1)!)^2}{(2p+3)!}.$$
D'où la propriété au rang $p+1$.

Par principe de récurrence :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.}$$

II. Intégrale de Gauss

10. (a) Notons tout d'abord que la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, on peut bien considérer l'unique primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

    Par définition, F est de classe $\mathscr{C}^1$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x) \geq 0$. Donc $\boxed{F \text{ est croissante sur } \mathbb{R}.}$

    (b) Soit $t \in [1, +\infty[$. Alors $1 \leq t$, donc en multipliant par $t > 0$, $t \leq t^2$ et $-t^2 \leq -t$. En appliquant exp qui est croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\boxed{e^{-t^2} \leq e^{-t}.}$

    Soit $x \in [1, +\infty[$. Par la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = F(1) + \int_1^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leq F(1) + \int_1^x e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= F(1) + \Big[-e^{-t}\Big]_1^x = F(1) + e - e^{-x} \leq F(1) + e \end{aligned}$$

    Par suite, $\boxed{F \text{ est majorée}}$ (par $F(1)+e$). Puisqu'elle est également croissante, $\boxed{\text{elle admet une limite finie en } +\infty}$ par théorème de limite monotone.

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

    (a) Soit $t \in [0, \sqrt{n}[$. Rappelons l'inégalité classique $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x \in]-1, +\infty[$. Puisque $-\frac{t^2}{n} \in]-1, 0]$, on obtient $\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq -\frac{t^2}{n}$, et donc $n \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq -t^2$ (car $n > 0$). D'où en passant à l'exponentielle (croissante sur $\mathbb{R}$) :

$$\exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)\right) \leq e^{-t^2}, \quad \text{ce qui se récrit} \quad \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2}.$$

    Cette dernière inégalité reste vraie lorsque $t = \sqrt{n}$. Par croissance de l'intégrale :

$$\boxed{\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.}$$

    (b) En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{n}\cos u$ (licite car $u \mapsto \cos(u)$ est de classe $\mathscr{C}^1$), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1 - \cos^2 u)^n (-\sqrt{n}\sin u)\,\mathrm{d}u = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 u)^n \sin u\,\mathrm{d}u \\ &= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} u\,\mathrm{d}u = \sqrt{n} W_{2n+1}. \end{aligned}$$

    Ainsi :

$$\boxed{\sqrt{n} W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.}$$

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors $\frac{t^2}{n} \in \mathbb{R}_+$, et toujours par l'inégalité classique du logarithme, $\ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right) \leq \frac{t^2}{n}$. Puisque $-n < 0$, on en déduit que $-n\ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right) \geq -t^2$, et en passant à l'exponentielle (croissante sur $\mathbb{R}$) :

$$\boxed{e^{-t^2} \leq \exp\left(-n\ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right)\right) = \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}.}$$

(b) On effectue le changement de variable $t = \sqrt{n}\tan(u)$ dans l'intégrale proposée : on a $\mathrm{d}t = \sqrt{n}(1+\tan^2 u)\,\mathrm{d}u$ et u varie de 0 à $B = \dfrac{\pi}{4}$ lorsque t varie de 0 à $\sqrt{n}$. On obtient donc :

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2 u)^{-n}\sqrt{n}(1+\tan^2 u)\,\mathrm{d}u \\ &= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 u}\right)^{-n+1} \mathrm{d}u \\ &\boxed{= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2p}(u)\,\mathrm{d}u}\end{aligned}$$

avec $p = n-1$.

(c) On effectue le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - u$ pour trouver :

$$\int_0^B \cos^{2p}(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-B} \cos^{2p}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(-\,\mathrm{d}t) \boxed{= \int_{\frac{\pi}{2}-B}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}(t)\,\mathrm{d}t.}$$

(d) D'après la question 12.(b) et par croissance de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t &\leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2}(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{n}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}(u)\,\mathrm{d}u \\ &\leq \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}(u)\,\mathrm{d}u = \boxed{\sqrt{n}W_{2n-2}}\end{aligned}$$

car $\sin^{2n-2}(u) \geq 0$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.

13. D'après les questions 11. et 12., on obtient l'encadrement suivant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leq \underbrace{\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t}_{=F(\sqrt{n})} \leq \sqrt{n}W_{2n-2}.$$

Calculons :

$$\sqrt{n}W_{2n+1} = \sqrt{\frac{n}{2n+1}}\sqrt{2n+1}W_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

d'après la question 8. On montre de même que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_{2n-2} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Par théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} F(\sqrt{n})$ existe et vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On a enfin vu à la question 10 que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ existe et est finie, notée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Par caractérisation séquentielle de la limite :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} F(\sqrt{n}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$