DM4

Correction du devoir maison

Exercice 1 (Formules de Machin et Gregory)

Partie I. La formule de Machin

1. Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$. Alors $2x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et on peut appliquer la formule d'addition :

$$\tan(2x) = \tan(x+x) = \frac{\tan x + \tan x}{1-\tan^2 x} \boxed{= \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}.}$$

En particulier, pour $x = \frac{\pi}{8}$, il vient :

$$1 = \tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}.$$

Soit encore :

$$1 - \tan^2\frac{\pi}{8} = 2\tan\frac{\pi}{8} \quad \Leftrightarrow \quad \tan^2\frac{\pi}{8} + 2\tan\frac{\pi}{8} - 1 = 0.$$

Mais la fonction polynomiale $t^2 + 2t - 1$, qui a pour discriminant 8, possède pour racines $\sqrt{2} - 1$ et $-1-\sqrt{2}$. Puisque $\tan\frac{\pi}{8} \geq 0$, on en déduit que $\boxed{\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1.}$

Ensuite, comme $\arctan\frac{1}{5}$ est dans l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, De même que $-\frac{\pi}{8}$ et $\frac{\pi}{8}$, il vient (par stricte croissance de tan sur I) :

$$-\frac{\pi}{8} \leq \arctan\frac{1}{5} \leq \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow \tan\left(-\frac{\pi}{8}\right) \leq \tan\left(\arctan\frac{1}{5}\right) \leq \tan\frac{\pi}{8} \Leftrightarrow 1-\sqrt{2} \leq \frac{1}{5} \leq \sqrt{2} - 1.$$

Il est évident que $\frac{1}{5} \geq 0 \geq 1 - \sqrt{2}$ il reste donc à vérifier la seconde inégalité. Mais

$$\frac{1}{5} \leq \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \frac{6}{5} \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{36}{25} \leq 2$$

ce qui est vrai. Et donc on en déduit que $\boxed{\arctan\frac{1}{5} \in \left]-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right[.}$

2. Pour $x \in]-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}[$, en appliquant deux fois la formule de la question précédente, il vient

$$\begin{aligned}\tan(4x) = \tan(2(2x)) = \frac{2\tan(2x)}{1-\tan^2(2x)} &= \frac{\frac{4\tan(x)}{1-\tan^2 x}}{1 - \frac{4\tan^2 x}{(1-\tan^2 x)^2}} \\ &= \frac{4\tan x}{1-\tan^2 x}\frac{(1-\tan^2 x)^2}{(1-\tan^2 x)^2 - 4\tan^2 x} \boxed{= \frac{4\tan x\,(1-\tan^2 x)}{1 - 6\tan^2 x + \tan^4 x}.}\end{aligned}$$

3. En appliquant ce qui précède à $\arctan\frac{1}{5}$ (qui appartient bien à l'intervalle $]-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}[$), il vient donc

$$\tan\left(4\arctan\frac{1}{5}\right) = \frac{4\times\frac{1}{5}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^2\right)}{1-6\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^4} = \frac{4}{5}\frac{24}{25}\frac{1}{\frac{5^4-6\times 25+1}{5^4}} = \frac{20\times 24}{476} = \frac{120}{119}.$$

Et alors il vient

$$\tan\left(4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}\right)=\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\frac{1}{239}}=\frac{\frac{120\times239-119}{119\times239}}{\frac{119\times239+120}{119\times239}}=\frac{120\times239-120+1}{119\times239+119+1}$$
$$=\frac{120\times238+1}{119\times240+1}=\frac{120\times2\times119+1}{119\times2\times120+1}=1$$

Puisque $0\leq\arctan\frac{1}{5}\leq\frac{\pi}{8}$ et que $0\leq\arctan\frac{1}{239}<\frac{\pi}{2}$, on en déduit que :

$$-\frac{\pi}{2}<4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}<\frac{\pi}{2}$$

Et donc

$$\tan\left(4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}\right)=1\Leftrightarrow\boxed{4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}}$$

Partie II. La formule de Gregory

4. Commençons par noter que S_n est dérivable sur $[0,1]$ par somme de fonctions qui le sont, et que pour $t\in[0,1]$,

$$S_n'(t)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k}=\sum_{k=0}^{n}\left(-t^2\right)^k=\frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}=\frac{1}{1+t^2}-(-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

Et donc : $\boxed{\frac{1}{1+t^2}=S_n'(t)+(-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}.}$

5. Soit $x\in[0,1]$. Intégrons la relation précédente entre 0 et x :

$$\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int_0^x S_n'(t)\,\mathrm{d}t+(-1)^{n+1}\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=[S_n(t)]_0^x+(-1)^{n+1}\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$=S_n(x)+(-1)^{n+1}\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Or, $\displaystyle\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=[\arctan t]_0^x=\arctan(x)-\arctan(0)=\arctan(x)$.
Et donc on a bien prouvé que :

$$\boxed{\arctan(x)=S_n(x)+(-1)^{n+1}\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t}$$

6. Soit $x\in[0,1]$, et soit $n\in\mathbb{N}$. On a alors :

$$\arctan(x)=S_{2n+1}(x)+(-1)^{2n+1+1}\int_0^x\frac{t^{2(2n+1)+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=S_{2n+1}(x)+\int_0^x\frac{t^{4n+4}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Puisque pour tout $t\in[0,x]$, $\displaystyle\frac{t^{4n+4}}{1+t^2}\geq 0$, $\displaystyle\int_0^x\frac{t^{4n+4}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\geq 0$ et donc :

$$\arctan(x)-S_{2n+1}(x)=(-1)^{2n+2}\int_0^x\frac{t^{4n+4}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\geq 0$$

Par conséquent, $S_{2n+1}(x)\leq\arctan(x)$.

De même, $\displaystyle S_{2n}(x)-\arctan(x)=(-1)^{2n+1}\int_0^x\frac{t^{4n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\geq 0$. Et donc $\arctan(x)\leq S_{2n}(x)$.

Puisque $|\arctan(x) - S_n(x)| = \left|(-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right|$, et que cette dernière intégrale est clairement positive, il vient

$$|\arctan(x) - S_n(x)| = \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x t^{2n+2}\,\mathrm{d}t \leq \left[\frac{t^{2n+3}}{2n+3}\right]_0^x \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$$

7. À x fixé, on a donc :

$$0 \leq |\arctan x - S_n(x)| \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3}.$$

Et donc par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} |\arctan(x) - S_n(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \arctan(x) - S_n(x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \arctan(x).}$$

Remarque. Cette formule est également valable pour $x = 1$, donc nous donne un moyen d'approximer $\frac{\pi}{4} = \arctan(1)$. Malheureusement, $S_n(1)$ tend beaucoup trop lentement vers $\frac{\pi}{4}$ pour que cette formule soit exploitable. Par exemple, pour avoir les 8 premières décimales de π, il faut n autour de 25 millions.

Exercice 2 (Points fixes de l'exponentielle complexe)

Partie I. Existence de points fixes de l'exponentielle

1. (a) L'idée est de faire apparaître un taux d'accroissement :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \sin'(0) = \cos(0) \boxed{= 1.}$$

De même, puisque $\tan(0) = 0$, on a $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \tan'(0) \boxed{= 1}$.

(b) Grâce aux limites calculées précédemment, on obtient $\lim_{x\to 0^+} f(x) = e^1 - 1 > 0$.

Par ailleurs, puisque $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$, alors $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{x}{\tan x} = 0$. On en déduit facilement que $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$.

Puisque par ailleurs f est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, et que $1 - \frac{\pi}{2} < 0 < e^1 - 1$, par le théorème des valeurs intermédiaires, $\boxed{\text{il existe } b \in]0, \tfrac{\pi}{2}[\text{ tel que } f(b) = 0.}$

Remarque. Ce n'est en fait pas tout à fait le TVI que nous utilisons ici puisque ni $f(0)$ ni $f(\pi/2)$ ne sont définis. Mais nous pouvons nous y ramener en prolongeant par continuité f en 0 et en $\frac{\pi}{2}$, et en appliquant le TVI à ce prolongement (qui satisfait cette fois toutes les hypothèses du cours).

(c) Notons qu'on a alors $\exp\left(\frac{b}{\tan b}\right) = \frac{b}{\sin b}$, et donc :

$$\exp(z) = \exp\left(\frac{b}{\tan b}\right)(\cos b + i\sin b) = \frac{b}{\sin b}(\cos(b) + i\sin(b)) = \frac{b}{\tan b} + b = z$$

Et donc $\boxed{z \text{ est bien un point fixe de l'exponentielle.}}$

Partie II. Détermination de l'ensemble des points fixes de l'exponentielle

2. Soit $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $e^z = e^a e^{ib}$, et

$$\exp(\bar{z}) = \exp(a - ib) = e^a e^{-ib} = e^a \overline{e^{ib}} = \overline{e^a}\,\overline{e^{ib}} = \overline{e^a e^{ib}} = \overline{\exp(z)}$$

Donc en particulier, si z est un point fixe de l'exponentielle avec $\mathrm{Im}(z) < 0$, alors $\bar{z} = \overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$, si bien que $\bar{z}$ est un point fixe de l'exponentielle de partie imaginaire positive ou nulle.

Et inversement, si z est un point fixe de l'exponentielle de partie imaginaire positive, alors son conjugué est un point fixe de l'exponentielle complexe de partie imaginaire négative. Donc il suffit bien de déterminer l'ensemble des points fixe de partie imaginaire positive ou nulle.

Par ailleurs, il n'existe pas de point fixe de l'exponentielle de partie imaginaire nulle puisque si $x \in \mathbb{R}$, alors $e^x \geq 1 + x > x$, et donc x n'est pas un point fixe de l'exponentielle. Donc il suffit bien de déterminer l'ensemble des points fixes de partie imaginaire strictement positive.

3. (a) Rappelons que puisque $e^z = e^x e^{iy}$ avec $e^x > 0$, y est un argument de e^z, et e^x est son module.

(b) Puisque $y > 0$, $\arg(z) = \arg(x + iy) \in [0, \pi]$.

D'autre part, nous venons de voir que e^x est le module de $\exp(z)$, et donc de z, si bien que :

$$z = x + iy = e^x e^{\arg(z)} = e^x(\cos\arg(z) + i \sin\arg(z)). \qquad (*)$$

D'où par identification des parties réelles $x = e^x \cos(\arg(z))$, et donc $\cos(\arg(z)) = xe^{-x} = \varphi(x)$. Puisque de plus $\arg(z) \in [0, \pi]$, on obtient $\arg(z) = \arccos(\varphi(x))$.

Or y est un argument de e^z, et donc de z. Deux arguments étant congrus modulo 2π, on a bien :

$$y \equiv \arccos(\varphi(x))[2\pi],$$

si bien qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = 2k\pi + \arccos(\varphi(x))$. Enfin, puisque $\arccos(\varphi(x)) \in [0, \pi]$ et $y \geq 0$, nécessairement $k \geq 0$, et donc $k \in \mathbb{N}$.

(c) Par identification des parties imaginaires dans $(*)$:

$$y = e^x \sin(\arg(z)) = e^x \sin(\arccos(\varphi(x)).$$

Mais pour tout $u \in [-1, 1]$, $\cos^2(\arccos u) + \sin^2(\arccos u) = 1$, si bien que $\sin^2(\arccos u) = 1 - u^2$. Puisque de plus, $\arccos u \in [0, \pi]$, $\sin(\arccos u) \geq 0$ et donc $\sin(\arccos u) = \sqrt{1 - u^2}$. En particulier, $y = e^x\sqrt{1 - \varphi(x)^2}$, et donc

$$\boxed{2k\pi = y - \arccos(\varphi(x)) = e^x\sqrt{1 - \varphi(x)^2} - \arccos(\varphi(x)).}$$

4. (a) La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car produit de fonctions dérivables, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = (1 - t)e^{-t}$. Donc le tableau de variations de φ est le suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
φ	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

Pour que $\sqrt{1-\varphi(t)^2}$ soit bien défini, il faut que $1-\varphi(t)^2 \geq 0$, soit encore que $\varphi(t) \in [-1,1]$. Et pour que $\arccos(\varphi(t))$ soit défini, il faut également que $\varphi(t) \in [-1,1]$.

Par stricte croissance et continuité de φ sur $]-\infty,1]$, il existe un unique $\alpha \in]-\infty,1]$ tel que $\varphi(\alpha) = -1$ (par le théorème de la bijection). Et alors pour tout $t < \alpha$, $\varphi(t) < -1$, et pour $t \geq \alpha$, $\varphi(t) \geq -1$, et $\varphi(t) \leq e^{-1} \leq 1$, si bien que $\varphi(t) \in [-1,1]$.

Donc $\boxed{\delta \text{ est définie sur } [\alpha,+\infty[.}$

Remarque. Puisque $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(\alpha) = -1$ et par croissance stricte de φ sur $]-\infty,1]$, on en déduit que $\alpha \leq 0$.

(b) Le tableau de variations de φ précédemment dressé prouve que sur $]\alpha,+\infty[$, φ est à valeurs dans $]-1,1[$. Or sur $]-1,1[$, $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ et arccos sont dérivables, donc par composition, $t \mapsto \sqrt{1-\varphi(t)^2}$ et $t \mapsto \arccos(\varphi(t))$ sont dérivables sur $]\alpha,+\infty[$. Par somme et produit de fonctions dérivables, δ est dérivable sur $]\alpha,+\infty[$. Et alors pour $t > \alpha$:

$$\begin{aligned}
\delta'(t) &= e^t\sqrt{1-\varphi(t)^2} - e^t\frac{2\varphi(t)\varphi'(t)}{2\sqrt{1-\varphi(t)^2}} + \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{1-\varphi(t)^2}} \\
&= \frac{e^t\left(1-\varphi(t)^2\right) - e^t\varphi(t)\varphi'(t) + \varphi'(t)}{\sqrt{1-\varphi(t)^2}} \\
&= \frac{e^t\left(1-t^2e^{-2t}\right) - e^t te^{-t}(1-t)e^{-t} + (1-t)e^{-t}}{\sqrt{1-\varphi(t)^2}} \\
&= \frac{e^t - t^2e^{-t} - te^{-t} + t^2e^{-t} + e^{-t} - te^{-t}}{\sqrt{1-\varphi(t)^2}} \\
&\boxed{= \frac{e^{-t}\left(e^{2t}+1-2t\right)}{\sqrt{1-\varphi(t)^2}}.}
\end{aligned}$$

Puisque $e^x \geq 1+x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient ici :

$$e^{2t}+1-2t \geq 1+2t+1-2t = 2 > 0.$$

Par suite, $\delta'(t) > 0$ pour tout $t > \alpha$, et δ est strictement croissante sur $[\alpha,+\infty[$.

(c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction δ est continue et strictement croissante sur $[\alpha,+\infty[$, et donc sur $[0,+\infty[$ également (on avait remarqué que $\alpha \leq 0$). Elle satisfait également $\delta(0) = 1-\arccos(0) = 0$. D'autre part, $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc :

$$\delta(t) = e^t\sqrt{1-\varphi(t)^2} - \arccos(\varphi(t)) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Par le théorème de la bijection, δ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. En particulier $\boxed{\text{il existe un unique } x_k \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } \delta(x_k) = 2k\pi.}$

(d) Soit $k \in \mathbb{N}$. Commençons par rappeler les identités connues sur x_k et y_k :

$$2k\pi = \delta(x_k) = e^{x_k}\sqrt{1-\varphi(x_k)^2} - \arccos(\varphi(x_k)) \quad \text{et} \quad y_k = 2k\pi + \arccos(\varphi(x_k)).$$

Calculons :

$$\begin{aligned}
\exp(x_k+iy_k) &= e^{x_k}\left(\cos(y_k) + i\sin(y_k)\right) \\
&= e^{x_k}\left(\cos\left(\arccos\left(\varphi(x_k)\right)\right) + i\sin\left(\arccos\left(\varphi(x_k)\right)\right)\right) \\
&= e^{x_k}\left(\varphi(x_k) + i\sqrt{1-\varphi(x_k)^2}\right) = e^{x_k}x_ke^{-x_k} + ie^{x_k}\sqrt{1-\varphi(x_k)^2} \\
&= x_k + i\left(2k\pi + \arccos\left(\varphi(x_k)\right)\right) = x_k + iy_k\,.
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{x_k + iy_k \text{ est bien un point fixe de l'exponentielle.}}$

5. Il s'agit donc de faire la synthèse de tout ce qui a été dit jusqu'à présent : si $z = x + iy$ est un point fixe de l'exponentielle, avec une partie imaginaire positive, alors par la question 3.(c), il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\delta(x) = 2k\pi$. Et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\delta(x) = x_k$. Et alors par la question 3.(b), $y = 2k\pi + \arccos(\varphi(x_k)) = y_k$. Si bien que $z = x_k + iy_k$.

   Et la question 4 prouve qu'inversement, tous les $x_k + iy_k$, pour $k \in \mathbb{N}$, sont des points fixes de l'exponentielle (de partie imaginaire positive car $k \geq 0$ et $\arccos(\varphi(x_k)) \in [0, \pi]$).

   On en déduit que les points fixes de l'exponentielle de partie imaginaire positive sont exactement les $x_k + iy_k, k \in \mathbb{N}$.

   Et donc en utilisant la question 2, l'ensemble des points fixes de l'exponentielle complexe est

$$\{x_k + iy_k, k \in \mathbb{N}\} \cup \{x_k - iy_k, k \in \mathbb{N}\}.$$
