DM3

Correction du devoir maison

Les fonctions hyperboliques réciproques

Réciproque du cosinus hyperbolique

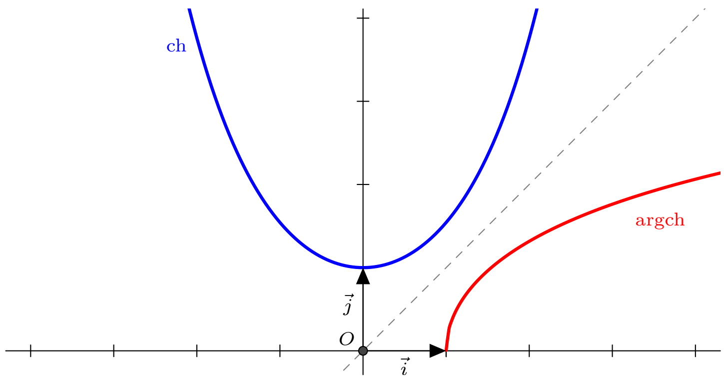
1. Les variations de la fonction ch ont été étudiées en cours : ch est **continue** et **strictement croissante** sur $[0,+\infty[$, et vérifie $\mathrm{ch}(0)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{ch}(x)=+\infty$.

   Donc $\boxed{\text{ch réalise une bijection de } [0,+\infty[\text{ sur } [1,+\infty[\text{. On note argch sa bijection réciproque.}}$

2. Tout d'abord, la fonction ch est dérivable sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier sur $[0,+\infty[$. Pour déterminer le domaine de dérivabilité de la fonction argch, on résout l'équation $\mathrm{ch}'(x)=0$ pour $x\in[0,+\infty[$:
$$\mathrm{ch}'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{sh}(x)=0 \;\Leftrightarrow\; x=0.$$
   La fonction argch est donc dérivable sur $[1,+\infty[\setminus\{\mathrm{ch}(0)\}=]1,+\infty[$. De plus, pour tout $y\in]1,+\infty[$:
$$\mathrm{argch}'(y)=\frac{1}{\mathrm{ch}'(\mathrm{argch}(y))}=\frac{1}{\mathrm{sh}(\mathrm{argch}(y))}.$$
   Or, on sait que $\mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)=1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, donc $\mathrm{sh}^2(x)=\mathrm{ch}^2(x)-1$. Ainsi :
$$|\mathrm{sh}(x)|=\sqrt{\mathrm{ch}^2(x)-1}$$
   Notons que $\mathrm{ch}^2(x)-1$ est bien positif puisque $\mathrm{ch}(x)\geq 1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Et pour $y\in]1,+\infty[$, on a $\mathrm{argch}(y)\in]0,+\infty[$ et donc $\mathrm{sh}(\mathrm{argch}(y))>0$. D'où :
$$\mathrm{sh}(\mathrm{argch}(y))=\sqrt{\mathrm{ch}^2(\mathrm{argch}(y))-1}=\sqrt{y^2-1}.$$
   Finalement, pour tout $y\in]1,+\infty[$:
$$\boxed{\mathrm{argch}'(y)=\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.}$$

3. On obtient donc le tableau de variation suivant, et la courbe représentative de argch à partir de celle de la fonction ch restreinte à $[0,+\infty[$ en effectuant une symétrie par rapport à la droite $y=x$.

x	1		$+\infty$
$\mathrm{argch}'(x)$	‖	$+$	
$\mathrm{argch}(x)$	0	↗	$+\infty$



4. (a) Pour calculer $\mathrm{argch}(2)$, on résout l'équation $\mathrm{ch}(x)=2$. On sait que cette équation a deux solutions : 2 a deux antécédents par la fonction ch, l'un étant positif, l'autre négatif. Puisque $\mathrm{argch}(2)>0$, on en déduite que $\mathrm{argch}(2)$ sera l'unique solution strictement positive de cette équation.
   Pour $x\in\mathbb{R}$, on résout donc :
$$\mathrm{ch}(x)=2 \;\Leftrightarrow\; e^x+e^{-x}=4 \;\Leftrightarrow\; e^{2x}-4e^x+1=0.$$
   On pose $X=e^x$. On obtient donc :
$$X^2-4X+1=0 \;\Leftrightarrow\; X=2\pm\sqrt{3}.$$
   D'où finalement $x=\ln(2+\sqrt{3})$ ou $x=\ln(2-\sqrt{3})$. Puisque $\ln(2-\sqrt{3})<0$, on en déduit finalement que $x=\ln(2+\sqrt{3})$, et donc :
$$\boxed{\mathrm{argch}(2)=\ln\left(2+\sqrt{3}\right).}$$

(b) Soit $y \in [1, +\infty[$, on résout l'équation $y = \mathrm{ch}(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$:

$$y = \mathrm{ch}(x) \Leftrightarrow 2y = e^x + e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = e^x \\ X^2 - 2yX + 1 = 0 \end{cases}$$

Or $y \geq 1$, et donc le discriminant $\Delta = 4y^2 - 4$ de ce polynôme est positif. Ainsi :

$$y = \mathrm{ch}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^x \\ X = y \pm \sqrt{y^2 - 1} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) \text{ ou } x = \ln\left(y - \sqrt{y^2-1}\right)$$

En effet on notera que $y + \sqrt{y^2-1} \geq y - \sqrt{y^2-1} > y - \sqrt{y^2} = 0$. On peut donc bien prendre le logarithme (qui est bijectif sur $\mathbb{R}_+^*$) dans la dernière équivalence.

Il résulte de ce calcul que $\ln(y + \sqrt{y^2-1})$ est une solution de l'équation $y = \mathrm{ch}(x)$, positive puisque $y \geq 1$. Mais argch étant la bijection réciproque de la restriction de ch à $[0, +\infty[$, $\mathrm{argch}(y)$ est l'unique solution positive de cette équation. Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{argch}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right),}$$

ceci étant valable pour tout $y \geq 1$.

Remarque. On aurait pu également écarter la deuxième solution $x = \ln\left(y - \sqrt{y^2-1}\right)$ en remarquant que :

$$y - \sqrt{y^2-1} = \frac{y^2 - (y^2-1)}{y + \sqrt{y^2-1}} = \frac{1}{y + \sqrt{y^2-1}} \in]0, 1[.$$

Réciproque du sinus hyperbolique

5. La fonction sh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \mathrm{sh}(x) = \pm\infty$.

   Donc $\boxed{\text{sh réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}. \text{ On note argsh sa bijection réciproque.}}$

6. Montrons que argsh est impaire. Son domaine de définition $\mathbb{R}$ est bien symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{sh}(x) = y$. Alors :

$$\mathrm{argsh}(-y) = \mathrm{argsh}(-\mathrm{sh}(x)) = \mathrm{argsh}(\mathrm{sh}(-x)) = -x = -\mathrm{argsh}(y).$$

   Donc argsh est impaire.

   Puisque la fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x) \neq 0$, argsh est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $y \in \mathbb{R}$:

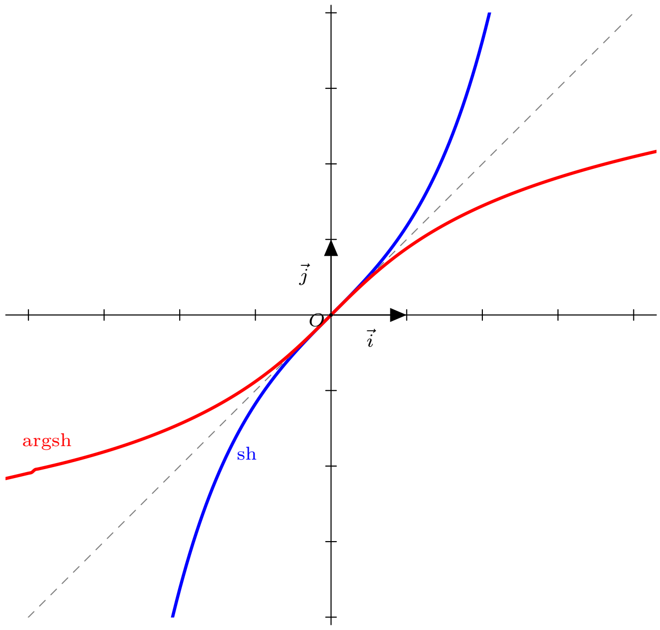
$$\mathrm{argsh}'(y) = \frac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}(y))}.$$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, puisque $\mathrm{ch}^2(x) = 1 + \mathrm{sh}^2(x)$ et que la fonction ch est toujours positive, il suit que $\mathrm{ch}(x) = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(x)}$. En remplaçant dans la formule de dérivation, on obtient :

$$\boxed{\mathrm{argsh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(\mathrm{argsh}(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.}$$

   On en déduit le tableau de variation de la fonction argsh et sa représentation graphique.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\mathrm{argsh}'(x)$	$+$
$\mathrm{argsh}(x)$	$0 \nearrow +\infty$



Cherchons une écriture explicite de la fonction argsh. Pour cela, on résout pour tout $y \in \mathbb{R}$ l'équation $y = \mathrm{sh}(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$y = \mathrm{sh}(x) \Leftrightarrow 2y = e^x - e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^x \\ X^2 - 2yX - 1 = 0 \end{cases}$$

Le discriminant $\Delta = 4y^2 + 4$ de ce polynôme est strictement positif. D'où :

$$y = \mathrm{sh}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^x \\ X = y \pm \sqrt{y^2+1} \end{cases} \quad \Leftrightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).$$

En effet on notera que la solution $y - \sqrt{y^2+1} < 0$ est impossible puisque $e^x > 0$. Puisque de plus $y + \sqrt{y^2+1} > 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, on peut donc bien prendre le logarithme (qui est bijectif sur $\mathbb{R}_+^*$) dans la dernière équivalence.

On obtient finalement que pour tout $y \in \mathbb{R}$: $\boxed{\mathrm{argsh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).}$

7. (a) La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par théorèmes opératoires sur les fonctions dérivables (on notera que $1 + x^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, de sorte que $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$). Et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(2\sqrt{1+x^2} + 2x \times \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) \times \frac{1}{\sqrt{1 + \left(2x\sqrt{1+x^2}\right)^2}} \\ &= \left(\frac{4(1+x^2) + 4x^2}{2\sqrt{1+x^2}}\right) \times \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4x^4}} \\ &= \left(\frac{2+4x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right) \times \frac{1}{\sqrt{(1+2x^2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} = 2\mathrm{argsh}'(x) \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 2\mathrm{argsh}(x) + c$. En prenant $x = 0$ dans cette égalité, on obtient $c = 0$, et donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 2\mathrm{argsh}(x).}$$

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\mathrm{sh}(2t) = \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} = \frac{(e^t - e^{-t})(e^t + e^{-t})}{2} = 2\mathrm{sh}(t)\mathrm{ch}(t) = 2\mathrm{sh}(t)\sqrt{1 + \mathrm{sh}(t)^2}.$$

Soit à présent $x \in \mathbb{R}$. La fonction sh réalisant une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il existe un unique réel $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = \mathrm{sh}(t)$, à savoir $t = \mathrm{argsh}(x)$. Calculons alors :

$$f(x) = f(\mathrm{sh}(t)) = \mathrm{argsh}\left(2\mathrm{sh}(t)\sqrt{1+\mathrm{sh}(t)^2}\right) = \mathrm{argsh}(\mathrm{sh}(2t)) = 2t = 2\mathrm{argsh}(x).$$

Réciproque de la tangente hyperbolique

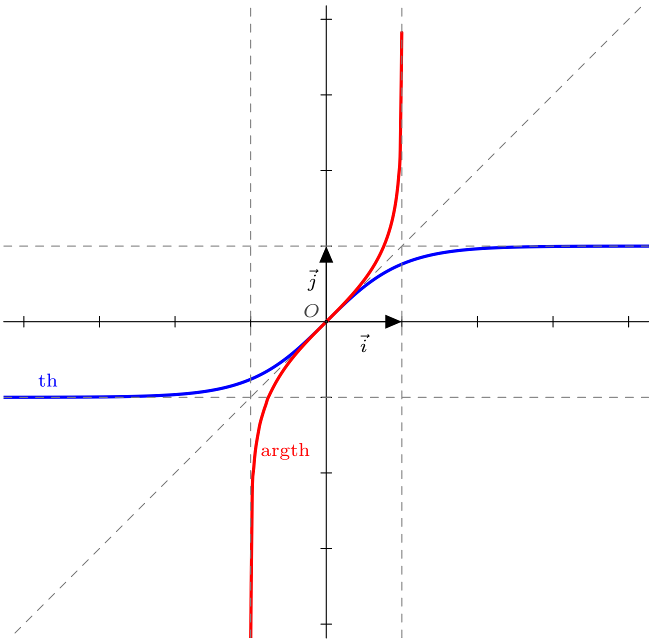
8. La fonction th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et continue sur cet intervalle, et $\lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{sh}(x) = \pm 1$.

   Donc $\boxed{\text{th réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur }]-1,1[\text{. On note argth } :]-1,1[\to \mathbb{R} \text{ sa réciproque.}}$

   On montre que argth est impaire de la même manière que pour argsh.

9. La fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions qui le sont dont le dénominateur ne s'annule pas (puisque $\mathrm{ch}(x) \geq 1$ pour tout x). De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\mathrm{th}'(x) = \frac{\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2}{\mathrm{ch}(x)^2} = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)^2} = 1 - \frac{\mathrm{sh}(x)^2}{\mathrm{ch}(x)^2} = 1 - \mathrm{th}(x)^2.$$
   Puisque $\mathrm{th}'(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, argth est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $y \in]-1,1[$:
$$\mathrm{argth}'(y) = \frac{1}{\mathrm{th}'(\mathrm{argth}(y))} = \frac{1}{1-\mathrm{th}^2(\mathrm{argth}(y))} = \frac{1}{1-y^2}.$$
   On retrouve en particulier que argth est strictement croissante sur $]-1,1[$. Dressons son tableau de variation, et donnons sa courbe représentative.

x	0	1
$\mathrm{argth}'(x)$	$+$	
$\mathrm{argth}(x)$	0 ↗	$+\infty$



10. On peut procédé de deux façon différentes.

   - **Méthode 1.** On résout l'équation $y = \mathrm{th}(x)$ pour $y \in]-1,1[$ et $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} y = \mathrm{th}(x) &\Leftrightarrow y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \Leftrightarrow y(e^{2x}+1) = (e^{2x}-1) \\ &\Leftrightarrow e^{2x}(y-1) = -1-y \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{-1-y}{y-1} \text{ car } y \neq 1 \\ &\Leftrightarrow 2x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \text{ car } \ln \text{ est bijectif et } \frac{1+y}{1-y} > 0 \text{ pour } y \in]-1,1[\\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \end{aligned}$$

   - **Méthode 2.** On intègre entre 0 et $y \in]-1,1[$ la fonction argth' :
$$\begin{aligned} \int_0^y \mathrm{argth}'(t)\mathrm{d}t &= \int_0^y \frac{1}{(1-t)(1+t)}\mathrm{d}t = \int_0^y \frac{1}{2}\frac{(1-t)+(1+t)}{(1-t)(1+t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^y \frac{1}{(1+t)} + \frac{1}{(1-t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\ln(|1+t|) - \ln(|1-t|)\right]_0^y \end{aligned}$$
   D'où $\mathrm{argth}(y) - \mathrm{argth}(0) = \frac{1}{2}\ln(|1+y|) - \ln(|1-y|)$, et donc $\mathrm{argth}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$ pour tout $y \in]-1,1[$.