DM11

Devoir maison à rendre le 09/04/2025

Exercice 1

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n est un entier naturel non nul.

Comme souvent, on identifiera toute famille $X = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ à la colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Pour tout $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose :

$$\mathscr{H}(A) = \left\{X \in \mathbb{K}^n \mid A^\top X = 0\right\} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}.$$

1. (a) Montrer que $\mathscr{H}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ pour tout $A \in \mathbb{K}^n$.
   (b) Déterminer, pour $n = 4$, la dimension de $\mathscr{H}(1,2,1,1) \cap \mathscr{H}(1,3,2,0) \cap \mathscr{H}(1,0,-1,3)$.
   (c) Montrer que $\dim(\mathscr{H}(A)) = n - 1$ pour tout $A \in \mathbb{K}^n$ non nul. Que vaut $\mathscr{H}(0, \dots, 0)$?

2. Soient $A \in \mathbb{K}^n$ non nul et $B \in \mathbb{K}^n$ deux vecteurs pour lesquels $\mathscr{H}(A) = \mathscr{H}(B)$. On note $t \in [\![1, n]\!]$ un entier pour lequel $a_t \neq 0$.
   (a) Montrer que $b_t \neq 0$.
   (b) Montrer que $\mathscr{H}(A) \subset \mathscr{H}(a_tB - b_tA)$, puis que A et B sont colinéaires.

En résumé, pour tous $A, B \in \mathbb{K}^n$ non nuls, $\mathscr{H}(A) = \mathscr{H}(B)$ si, et seulement si, A et B sont colinéaires.

3. Montrer que pour tous $A, B \in \mathbb{K}^n$, $\dim(\mathscr{H}(A) \cap \mathscr{H}(B)) = n - 2$ si, et seulement si, la famille (A, B) est libre. *On pourra s'intéresser à $\mathscr{H}(A) + \mathscr{H}(B)$.*

4. Soit $(A_1, \dots, A_p)$ une famille libre de vecteurs de $\mathbb{K}^n$.
   (a) Pourquoi existe-t-il une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ inversible dont les p premières colonnes sont $A_1, \dots, A_p$? On notera $A_{p+1}, \dots, A_n$ les colonnes suivantes de A.
   (b) Justifier l'existence d'une famille $(B_1, \dots, B_n)$ de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ pour laquelle $A_i^\top B_j = \delta_{ij}$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, et montrer que la famille $(B_1, \dots, B_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.
   (c) Montrer que $\displaystyle\bigcap_{1 \leq i \leq p} \mathscr{H}(A_i) = \mathrm{Vect}(B_{p+1}, \dots, B_n)$.

5. Montrer que pour toute famille $(A_1, \dots, A_p)$ de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ de rang r :

$$\dim\left(\bigcap_{1 \leq i \leq p} \mathscr{H}(A_i)\right) = n - r.$$