DM11

Correction du devoir maison

Exercice 1

1. (a) On peut répondre simplement que $\mathscr{H}(A)$ est l'ensemble des solutions d'un système linéaire **homogène** d'une équation à n inconnues, et donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

On peut aussi utiliser la caractérisation d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

- $X = 0_{\mathbb{K}^n}$ appartient à $\mathscr{H}(A)$ car $A^\top X = 0$.
- Soient $X, Y \in \mathscr{H}(A)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors par les règnes du calcul matriciel :

$$A^\top(\lambda X + Y) = \lambda A^\top X + A^\top Y \overset{X,Y\in\mathscr{H}(A)}{=} \lambda 0 + 0 = 0.$$

Donc $\lambda X + Y$ appartient à $\mathscr{H}(A)$.

Ainsi, $\boxed{\mathscr{H}(A) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{K}^n \text{ pour tout } A \in \mathbb{K}^n.}$

(b) Notons tout de suite que $F = \mathscr{H}(1,2,1,1) \cap \mathscr{H}(1,3,2,0) \cap \mathscr{H}(1,0,-1,3)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ car intersection de sous-espaces. De plus, pour tout $X = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$:

$$X \in F \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z + t = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ x - z + 3t = 0 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + 2y + z + t = 0 \\ y + z - t = 0 \\ -2y - 2z + 2t = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + 2y + z + t = 0 \\ y + z - t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - z + 3t = 0 \\ y + z - t = 0 \end{cases}$$

On identifie les inconnues principales, x et y, et paramètres, z et t. Ainsi :

$$F = \{(z - 3t, -z + t, z, t),\ z, t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\Big((1,-1,1,0), (-3,1,0,1)\Big).$$

On retrouve ici que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^4$. De plus, la famille $\mathscr{F} = \Big((1,-1,1,0), (-3,1,0,1)\Big)$ est génératrice de F, et libre car constituée de **deux** vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de F.

Ainsi, $\boxed{\mathscr{H}(1,2,1,1) \cap \mathscr{H}(1,3,2,0) \cap \mathscr{H}(1,0,-1,3) \text{ est de dimension } \mathrm{Card}(\mathscr{F}) = 4.}$

(c) Soit $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ non nul : il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $a_k \neq 0$.

Soit $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Alors :

$$X \in \mathscr{H}(A) \Leftrightarrow a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0 \Leftrightarrow x_k = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{a_i}{a_k} x_i.$$

On identifie inconnue principale, x_k, et inconnues paramètres, $x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$. D'où, en notant $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$:

$$\begin{aligned} \mathscr{H}(A) &= \left\{ \left(x_1, \ldots, x_{k-1}, -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{a_i}{a_k} x_i, x_{k+1}, \ldots, x_n \right),\ x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} x_i \left(e_i - \frac{a_i}{a_k} e_k \right),\ x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\Big(e_1 - \frac{a_1}{a_k} e_k, \ldots, e_{k-1} - \frac{a_{k-1}}{a_k} e_k, e_{k+1} - \frac{a_{k+1}}{a_k} e_k, \ldots, e_n - \frac{a_n}{a_k} e_k \Big) \end{aligned}$$

Notons pour tout $i \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}$, $u_i = e_i - \frac{a_i}{a_k} e_k$. La famille $\mathscr{F} = (u_i)_{i \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}}$ est génératrice de $\mathscr{H}(A)$. Montrons qu'elle est libre. Soit pour cela $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. On résout :

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}} \alpha_i u_i = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}} \alpha_i \left(e_i - \frac{a_i}{a_k} e_k \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{i \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}} \alpha_i e_i + \left(- \sum_{i \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}} \alpha_i \frac{a_i}{a_k} \right) e_k = 0
\end{aligned}$$

La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ étant libre, ceci équivaut à $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{k-1} = \alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_n = 0$.

Ainsi, $\mathscr{F}$ est une famille libre, donc une base de $\mathscr{H}(A)$, et $\boxed{\dim(\mathscr{H}(A)) = \mathrm{Card}(\mathscr{F}) = n-1.}$

Si $A = (0, \ldots, 0)$, alors tout X de $\mathbb{K}^n$ appartient à $\mathscr{H}(A)$ puisque $A^\top X = 0$. Ainsi $\boxed{\mathscr{H}(A) = \mathbb{K}^n.}$

Remarque. Cette question, bien qu'élémentaire, est assez pénible à rédiger. Nous aurons un moyen plus efficace (et agréable) d'obtenir la dimension de $\mathscr{H}(A)$ dans un prochain chapitre.

2. (a) Supposons que $b_t = 0$. Alors $X = e_t$ (t-ème vecteur de la base canonique) appartiendrait à $\mathscr{H}(B)$ puisque $B^\top e_t = b_t = 0$. Et puisque $\mathscr{H}(B) = \mathscr{H}(A)$, on aurait aussi $0 = A^\top e_t = a_t$, ce qui est faux.

   Donc $\boxed{b_t \text{ est non nul.}}$

   (b) Prenons X dans $\mathscr{H}(A) = \mathscr{H}(B)$, et montrons que X appartient à $\mathscr{H}(a_t B - b_t A)$:

$$(a_t B - b_t A)^\top X = a_t B^\top X - b_t A^\top X \overset{X \in \mathscr{H}(A) \text{ et } \mathscr{H}(B)}{=} a_t \times 0 - b_t \times 0 = 0.$$

   Ainsi $\boxed{\mathscr{H}(A) \subset \mathscr{H}(a_t B - b_t A).}$

   Puisque $\mathscr{H}(A) \subset \mathscr{H}(a_t B - b_t A)$ et que $\dim(\mathscr{H}(A)) = n-1$ d'après la question 1.(c), la dimension de $\mathscr{H}(a_t B - b_t A)$ est $n-1$ ou n. Mais :

$$A^\top e_t = a_t \neq 0 \quad \text{ et } \quad (a_t B - b_t A)^\top e_t = a_t B^\top e_t - b_t A^\top e_t = a_t b_t - b_t a_t = 0.$$

   Donc e_t appartient à $\mathscr{H}(a_t B - b_t A)$, mais pas à $\mathscr{H}(A)$. L'inclusion $\mathscr{H}(A) \subset \mathscr{H}(a_t B - b_t A)$ est donc stricte, et $\dim(\mathscr{H}(a_t B - b_t A)) \neq n-1$ par conséquent.

   Ainsi, $\dim(\mathscr{H}(a_t B - b_t A)) = n$, et $\mathscr{H}(a_t B - b_t A) = \mathbb{K}^n$. Par la question 1.(c), ceci est possible uniquement si $a_t B - b_t A = 0$, ce qui se récrit $B = \dfrac{a_t}{b_t} A$: $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont colinéaires.}}$

3. Supposons la famille (A, B) libre. Alors $\mathscr{H}(A) \neq \mathscr{H}(B)$ par la question précédente. De plus, A et B sont non nuls[1] et $\dim(\mathscr{H}(A)) = \dim(\mathscr{H}(B)) = n-1$.

   Considérons le sous-espace $F = \mathscr{H}(A) + \mathscr{H}(B)$. Il contient $\mathscr{H}(A)$ et $\mathscr{H}(B)$ donc est de dimension $n-1$ ou n. Si sa dimension est $n-1$, alors $\mathscr{H}(A) = F = \mathscr{H}(B)$, ce qui est faux puisque la famille (A, B) est libre. Donc $\dim(F) = n$, et par la formule de Grassmann :

$$\begin{aligned}
\dim(\mathscr{H}(A) \cap \mathscr{H}(B)) &= \dim(\mathscr{H}(A)) + \dim(\mathscr{H}(B)) - \dim(\mathscr{H}(A) + \mathscr{H}(B)) \\
&= (n-1) + (n-1) - n \boxed{= n-2.}
\end{aligned}$$

   Réciproquement, supposons $\mathscr{H}(A) \cap \mathscr{H}(B)$ de dimension $n-2$. Alors $\mathscr{H}(A) \neq \mathscr{H}(B)$ car sinon $\mathscr{H}(A) \cap \mathscr{H}(B) = \mathscr{H}(A)$ serait de dimension au moins $n-1$. Par la question précédente, A et B ne sont pas colinéaires, et $\boxed{\text{la famille } (A, B) \text{ est libre.}}$

[1] Une famille contenant le vecteur nul est liée.

4. (a) La famille $(A_1, \ldots, A_p)$ étant libre, on peut la compléter en une base $(A_1, \ldots, A_n)$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Considérons la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont données par $A_1, \ldots, A_n$.

Pour montrer que la matrice A est inversible, il faut et il suffit de montrer que le système linéaire $AX = 0$ admet pour unique solution $X = 0$. Soit donc $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = 0_{n,1}$. Par les règles de calcul matriciel, cette égalité se récrit :

$$x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n = 0_{n,1}.$$

Par liberté de la famille $(A_1, \ldots, A_n)$, on obtient $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Ainsi, $X = 0_{n,1}$ et $\boxed{\text{la matrice } A \text{ est inversible.}}$

Remarque. Nous avons utilisé qu'une matrice A est inversible si, et seulement si, le système linéaire $AX = 0$ admet pour unique solution $X = 0_{n,1}$. Rappelons brièvement sa démonstration.

Le système $AX = 0_{n,1}$ est formé de n équations avec n inconnues. Il admet une unique solution $X = 0_{n,1}$ si, et seulement si, il est de rang $r = n$, soit si, et seulement si, la matrice échelonnée obtenue après application de l'algorithme de Gauss à A possède n pivots. Or ceci est bien équivalent à l'inversibilité de A.

(b) Puisque A est inversible, $A^\top$ l'est aussi : il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $A^\top \times B = I_n$. Notons alors $(B_1, \ldots, B_n)$ les vecteurs colonnes de B. Par définition du calcul matriciel, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$\boxed{\delta_{i,j} = [I_n]_{i,j} = \left[A^\top \times B\right]_{i,j} = A_i^\top \times B_j.}$$

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\alpha_1 B_1 + \cdots + \alpha_n B_n = 0_{n,1}.$$

Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on obtient par multiplication par $A_i^\top$ à gauche :

$$0 = A_i^\top \times (\alpha_1 B_1 + \cdots + \alpha_n B_n) = \underbrace{\alpha_1 A_i^\top B_1 + \cdots +}_{=0} \alpha_i \underbrace{A_i^\top B_i}_{=1} \underbrace{+ \cdots + \alpha_n A_i^\top B_n}_{=0} = \alpha_i.$$

Ainsi, la famille $(B_1, \ldots, B_n)$ est libre, de cardinal $n = \dim(\mathbb{K}^n)$: $\boxed{\text{c'est une base de } \mathbb{K}^n.}$

Remarque. Nous venons entre autres de montrer que pour une matrice inversible, la famille de ces vecteurs colonnes est une base de $\mathbb{K}^n$. Et nous avions montré la réciproque à la question précédente. Nous retrouverons ce résultat dans un prochain chapitre lorsque nous définirons convenablement le rang d'une matrice.

(c) Soit $X \in \mathbb{K}^n$. Puisque $(B_1, \ldots, B_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$, il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ (uniques) tels que :

$$X = \alpha_1 B_1 + \cdots + \alpha_n B_n.$$

Alors :

$$\begin{aligned} X \in \bigcap_{1 \le i \le p} \mathscr{H}(A_i) &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1,p]\!],\ X \in \mathscr{H}(A_i) \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,p]\!],\ A_i^\top X = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1,p]\!],\ \alpha_1 A_i^\top B_1 + \cdots + \alpha_n A_i^\top B_n = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1,p]\!],\ \alpha_i = 0 \underset{(B_1,\ldots,B_n)\text{ libre}}{\Leftrightarrow} X \in \mathrm{Vect}(B_{p+1}, \ldots, B_n). \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\bigcap_{1 \le i \le p} \mathscr{H}(A_i) = \mathrm{Vect}(B_{p+1}, \ldots, B_n).}$

Remarque. En particulier, on a montré à cette question que si $(A_1, \dots, A_p)$ est une famille libre, alors :

$$\dim\left(\bigcap_{1\leq i\leq p} \mathscr{H}\left(A_i\right)\right) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left(B_{p+1}, \dots, B_n\right)\right) = n - r$$

car la famille $(B_{p+1}, \dots, B_n)$ est libre.

5. Supposons que la famille $(A_1, \dots, A_p)$ est de rang r. Quitte à renuméroter les vecteurs de cette famille, on peut supposer que la famille $(A_1, \dots, A_r)$ est libre, et que pour tout $k \in [\![r+1, p]\!]$, A_k est combinaison linéaire de $A_1, \dots, A_r$: il existe $\alpha_{k,1}, \dots, \alpha_{k,r}$ des scalaires tels que :

$$A_k = \alpha_{k,1}A_1 + \cdots + \alpha_{k,r}A_r.$$

Montrons que :

$$\bigcap_{1\leq i\leq p} \mathscr{H}(A_i) = \bigcap_{1\leq i\leq r} \mathscr{H}(A_i).$$

L'inclusion $\displaystyle\bigcap_{1\leq i\leq p} \mathscr{H}(A_i) \subset \bigcap_{1\leq i\leq r} \mathscr{H}(A_i)$ est évidente.

Réciproquement, considérons $X \in \displaystyle\bigcap_{1\leq i\leq r} \mathscr{H}(A_i)$. Pour tout $k \in [\![r+1, p]\!]$:

$$\begin{aligned} A_k^\top X &= \left(\alpha_{k,1}A_1 + \cdots + \alpha_{k,r}A_r\right)^\top X \\ &= \alpha_{k,1}\underbrace{A_1^\top X}_{=0} + \cdots + \alpha_{k,r}\underbrace{A_r^\top X}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Donc X appartient à $\displaystyle\bigcap_{1\leq i\leq p} \mathscr{H}(A_i)$. Ainsi, $\displaystyle\bigcap_{1\leq i\leq p} \mathscr{H}(A_i) = \bigcap_{1\leq i\leq r} \mathscr{H}(A_i)$.

Puisque $(A_1, \dots, A_r)$ est une famille libre, par application de la question 4 :

$$\dim\left(\bigcap_{1\leq i\leq p} \mathscr{H}(A_i)\right) = \dim\left(\bigcap_{1\leq i\leq r} \mathscr{H}(A_i)\right) = n - r.$$

Remarques. Nous avons établi les résultats suivants dans ce devoir maison :

- si A est un vecteur non nul, alors $\mathscr{H}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ de dimension $n-1$.
  Un tel sous-espace de dimension $\dim(\mathbb{K}^n) - 1$ est appelé un *hyperplan de* $\mathbb{K}^n$.
- deux hyperplans d'équations données par A et B non nuls sont égaux si, et seulement si, A et B sont colinéaires.
- l'intersection des r hyperplans d'équations définies par les vecteurs $A_1, \dots, A_r$ linéairement indépendants, est de dimension $n - r$.

Nous retrouverons ces résultats dans un prochain chapitre, avec un point de vue un peu différent (et plus général) caractérisant les hyperplans à l'aide de formes linéaires.
