DM11

Devoir maison à rendre le 01/04/2025

Exercice 1

1. (a) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ avec $x < y$. Puisque f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient par inégalité des pentes, pour tout $z > y$:
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}.$$
Par hypothèse, f admet une limite finie en $+\infty$, de sorte que $\lim\limits_{z\to+\infty} \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} = 0$. Par passage à la limite dans les inégalités, on obtient :
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq 0, \text{ et donc } f(y) \leq f(x).$$
La fonction f est bien décroissante.

Puisque f est décroissante et tend vers b en $+\infty$, $f(x) \geq b$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, et $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{D}$.

(b) Puisque f est convexe et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, f' est croissante. Comme de plus f est décroissante, $f'(x)$ est majorée par 0. Par théorème de limite monotone, f' admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}_-$ en $+\infty$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) \leq \ell$.

Soient $x < y$ deux réels positifs. Par le théorème des accroissements finis, il existe un réel $c_{x,y} \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c_{x,y}) \leq \ell$.

Par passage à la limite lorsque $y \to +\infty$, on obtient $0 \leq \ell$. Et puisque nous savons déjà que $\ell \leq 0$, $\ell = 0$ et f' admet une limite nulle en $+\infty$.

2. (a) Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = f(x) - ax - b$. Montrons que g est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda \in [0, 1]$:
$$\begin{aligned} g(\lambda x + (1-\lambda)y) &= f(\lambda x + (1-\lambda)y) - a(\lambda x + (1-\lambda)y) - b \\ &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \lambda a x - (1-\lambda)ay - b \\ &= \lambda(f(x) - ax - b) + (1-\lambda)(f(y) - ay - b) \\ &= \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y). \end{aligned}$$
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

Par la question précédente, $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de son asymptote en $+\infty$, ce qui s'écrit encore $f(x) - (ax + b) \geq 0$ pour tout $x > 0$. Ainsi $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{D}$.

(b) Puisque f est dérivable, g l'est aussi, et $g'(x) = f'(x) - a$ pour tout $x > 0$. Par application de la première question à g, on en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x) = 0$, ce qui se récrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = a$.

Exercice 2 (Involutions de $[\![1, n]\!]$)

1. Pour tout $\sigma \in I_F$, $\varphi^{-1} \circ \sigma \circ \varphi$ est une application de E dans E satisfaisant :
$$\begin{aligned} \left(\varphi^{-1} \circ \sigma \circ \varphi\right) \circ \left(\varphi^{-1} \circ \sigma \circ \varphi\right) &= \varphi^{-1} \circ \sigma \circ \sigma \circ \varphi \\ &= \varphi^{-1} \circ \mathrm{id}_F \circ \varphi = \mathrm{id}_E \end{aligned}$$
Donc $\Phi : \sigma \mapsto \varphi^{-1} \circ \sigma \circ \varphi$ est bien une application de I_F sur I_E.

On vérifie de même que $\Psi : \tau \mapsto \varphi \circ \tau \circ \varphi^{-1}$ est une application de I_E dans I_F. De plus, pour tout $\sigma \in I_F$:

$$\Psi \circ \Phi(\sigma) = \Psi(\varphi^{-1} \circ \sigma \circ \varphi) = \varphi \circ \left(\varphi^{-1} \circ \sigma \circ \varphi\right) \circ \varphi^{-1} = \sigma.$$

Donc $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{I_F}$, et on montre de même que $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{I_E}$. Ainsi, Φ et Ψ sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

$\boxed{\Psi \text{ réalise bien une bijection de } I_F \text{ dans } I_E}$.

Partie I. Développement limité de $e^{x+x^2/2}$.

Dans la suite, on note $\varphi : x \mapsto \exp\left(x + \frac{x^2}{2}\right)$.

2. Rappelons le $DL_4(0)$ de l'exponentielle :

$$\exp(u) \underset{u\to 0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + o(u^4).$$

Pour $u = x + \dfrac{x^2}{2}$, calculons $u^2 = x^2 + x^3 + \dfrac{x^4}{4}$, $u^3 = x^3 + \dfrac{3}{2}x^4 + o(x^4)$ et $u^4 = x^4 + o(x^4)$. D'où :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{12}x^4 + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$
$$\boxed{\underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{10}{24}x^4 + o(x^4).}$$

3. La fonction φ est dérivable en tant que composée de fonctions qui le sont, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(x) = (1+x)\exp\left(x + \frac{x^2}{2}\right) = (1+x)\varphi(x).$$

Donc $\boxed{\varphi \text{ est solution de l'équation différentielle } y' = (1+x)y.}$

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions qui le sont. Par la question précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = (1+x)\varphi(x).$$

Notons $u : x \mapsto x + 1$. Cette fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale, et satisfait pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$u'(x) = 1 \ \text{ et } \ u^{(i)}(x) = 0 \text{ pour tout } i \geq 2.$$

Par la formule de Leibniz appliquée à l'égalité $\varphi' = u \times \varphi$, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi^{(k+1)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} u^{(i)}(x)\varphi^{(k-i)}(x) = u(x)\varphi^{(k)}(x) + \binom{k}{1} u'(x)\varphi^{(k-1)}(x) + 0$$
$$\boxed{= (1+x)\varphi^{(k)}(x) + k\varphi^{(k-1)}(x).}$$

5. φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions qui le sont. Par la formule de Taylor-Young, $\boxed{\varphi \text{ possède donc bien un } DL_n(0) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$, que l'on notera

$$\boxed{\varphi(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}x^k + o\left(x^n\right)}$$

où $a_k = \varphi^{(k)}(0)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

6. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, en utilisant les questions précédentes :

$$a_{k+1} = \varphi^{(k+1)}(0) = (1+0)\varphi^{(k)}(0) + k\varphi^{(k-1)}(0) \boxed{= a_k + k a_{k-1}.}$$

Partie II. Nombre d'involutions de $[\![1,n]\!]$.

7. Remarquons pour commencer qu'une involution de $[\![1,n]\!]$ est bijective, de bijection réciproque elle-même. Par conséquent, I_n est un sous-ensemble de $\mathfrak{S}_n$, le groupe des permutations de $[\![1,n]\!]$.

   Si $n=1$, il n'y a que l'application identité dans $\mathfrak{S}_1$, qui est une involution. Donc $\boxed{i_1=1.}$

   Pour $n=2$, il y a deux bijections de $[\![1,2]\!]$ dans lui-même, l'identité et l'application qui échange 1 et 2. Et elles sont toutes deux involutives. Donc $\boxed{i_2=2.}$

   Pour $n=3$, faisons la liste des éléments de $\mathfrak{S}_3$:

   $$\mathrm{id}_{[\![1,3]\!]},\ c_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\ c_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\ \tau_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\ \tau_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\ \tau_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}.$$

   On vérifie que $\mathrm{id}_{[\![1,3]\!]}$, τ_1, τ_2, τ_3 sont des involutions contrairement à c_1 et c_2. Donc $\boxed{i_3=4.}$

8. (a) On suppose que $\sigma(n+1)=n+1$. Puisque σ est une bijection de $[\![1,n+1]\!]$ dans lui-même, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $\sigma(k)$ appartient à $[\![1,n]\!]$. Donc $\boxed{[\![1,n]\!]\text{ est stable par }\sigma.}$

   On peut donc regarder l'application induite par σ sur $[\![1,n]\!]$. On la note σ_{n+1}, définie par $\sigma_{n+1}:\begin{array}{ccc}[\![1,n]\!]&\longrightarrow&[\![1,n]\!]\\ j&\longmapsto&\sigma(j)\end{array}$. Montrons que σ_{n+1} appartient à I_n. C'est bien une application de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même, et pour tout $k\in[\![1,n]\!]$:

   $$\sigma_{n+1}\circ\sigma_{n+1}(k)=\sigma\circ\sigma(k)=k.$$

   Donc σ_{n+1} est involutive, et $\boxed{\text{appartient bien à }I_n.}$
   L'application $\Phi:\sigma\mapsto\sigma_{n+1}$ de $F_{n+1}=\{\sigma\in I_{n+1}\mid\sigma(n+1)=n+1\}$ sur I_n est bien définie par ce qui précède. De plus, considérons

   $$\Psi:\tau\in I_n\mapsto\left(\sigma:k\in[\![1,n+1]\!]\mapsto\begin{cases}\tau(k)&\text{si }k\in[\![1,n]\!]\\ n+1&\text{si }k=n+1\end{cases}\right).$$

   On vérifie comme précédemment que pour tout $\tau\in I_n$, $\Psi(\tau)$ est un élément de I_{n+1} fixant $n+1$, soit $\Psi(\tau)\in F_{n+1}$. Et de manière immédiate :

   $$\Psi\circ\Phi=\mathrm{id}_{F_{n+1}}\quad\text{et}\quad\Phi\circ\Psi=\mathrm{id}_{I_n}.$$

   Donc $\boxed{\Phi\text{ réalise une bijection de }F_{n+1}\text{ sur }I_n.}$
   Par conséquent, ces deux ensembles ont même cardinal égal à i_n.

   (b) On suppose que $\sigma(n+1)=k\in[\![1,n]\!]$. Puisque σ est involutive, on a donc également $\sigma(k)=n+1$.

   Puisque σ est une bijection de $[\![1,n+1]\!]$ dans lui-même, pour tout $i\in[\![1,n]\!]\backslash\{k\}$, $\sigma(i)$ est distinct de k et $n+1$, et donc appartient à $[\![1,n]\!]\backslash\{k\}$. Par conséquent, $\boxed{[\![1,n]\!]\backslash\{k\}\text{ est stable par }\sigma.}$

   Notons $\sigma_k:\begin{array}{ccc}[\![1,n]\!]\backslash\{k\}&\longrightarrow&[\![1,n]\!]\backslash\{k\}\\ j&\longmapsto&\sigma(j)\end{array}$ l'application induite par σ sur $[\![1,n]\!]\backslash\{k\}$.

   On vérifie comme à la question précédente que $\Phi:\sigma\mapsto\sigma_k$ réalise une bijection de $F_k=\{\sigma\in I_{n+1}\mid\sigma(n+1)=k\}$ sur $I_{[\![1,n]\!]\backslash\{k\}}$, la bijection réciproque étant donnée par :

   $$\Psi:\begin{array}{ccc}I_{[\![1,n]\!]\backslash\{k\}}&\longrightarrow&F\\ \tau&\longmapsto&\left(\sigma:i\mapsto\begin{cases}k&\text{si }i=n+1\\ n+1&\text{si }i=k\\ \tau(i)&\text{sinon}\end{cases}\right)\end{array}.$$

   Par conséquent, les deux ensembles F_k et $I_{[\![1,n]\!]\backslash\{k\}}$ sont de même cardinal égal à i_{n-1} en utilisant la première question, et ceci pour tout $k\in[\![1,n]\!]$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les questions précédentes nous invitent à partitionner I_{n+1} en :
$$I_{n+1} = \bigsqcup_{k=1}^{n+1} F_k$$
où pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, $F_k = \{\sigma \in I_{n+1} \mid \sigma(n+1) = k\}$. Ainsi :
$$i_{n+1} = \text{Card}(I_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n} \text{Card}(F_k) + \text{Card}(F_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n} i_{n-1} + i_n \boxed{= n i_{n-1} + i_n.}$$

10. Grâce aux questions 2 et 5, et par unicité du développement limité de la fonction $x \mapsto \exp\left(x + \frac{x^2}{2}\right)$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2!$, $a_3 = 3!\dfrac{2}{3} = 4$. Ainsi, $i_n = a_n$ pour $n = 0, 1, 2, 3$.

    On montre alors par récurrence (que je vous laisse rédiger) que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ i_n = a_n}$, les suites (i_n) et (a_n) satisfaisant la même relation de récurrence.

Partie III. Une expression de i_n.

11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons le développement limité de $\varphi : x \mapsto \exp\left(x + \frac{x^2}{2}\right)$ en 0 à l'ordre n de deux manières différentes. Tout d'abord, par la question 5 :
$$\varphi(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} x^k + o(x^n).$$
D'autre part :
$$\exp\left(x + \frac{x^2}{2}\right) = \exp(x)\exp\left(\frac{x^2}{2}\right) = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + o(x^n)\right) \times \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{b_j}{j!} x^j + o\left(x^n\right)\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i+j=k} \frac{1}{i!} \frac{b_j}{j!}\right) x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} b_j\right) \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$
Par unicité du développement limité, on peut identifier les coefficients d'ordre n dans ces deux développements limités :
$$\frac{a_n}{n!} = \frac{1}{n!}\left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} b_j\right), \quad \text{soit encore} \quad \boxed{a_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} b_k.}$$

12. Soit $p \in \mathbb{N}$. Par substitution dans le développement limité d'ordre $p+1$ en 0 de l'exponentielle :
$$\exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \underset{x \to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2 \times 2!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{2^p \times p!} + \frac{x^{2p+2}}{2^{p+1} \times (p+1)!} + o(x^{2p+2}).$$
D'autre part, on a noté :
$$e^{\frac{x^2}{2}} \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{2p+2} \frac{b_k}{k!} x^k + o\left(x^{2p+2}\right)$$
Par unicité du développement limité, on obtient :
$$\frac{b_{2p}}{(2p)!} = \frac{1}{2^p \times p!} \quad \text{et} \quad \frac{b_{2p+1}}{(2p+1)!} = 0, \quad \text{soit encore} \quad \boxed{b_{2p} = \frac{(2p)!}{2^p \times p!} \quad \text{et} \quad b_{2p+1} = 0.}$$

13. Avec les résultats établis dans les question précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$i_n = a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} b_{2p} = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{(2p)!(n-2p)!} \frac{(2p)!}{2^p \times p!} \boxed{= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{2^p \times p! \times (n-2p)!}}$$