

Calcul de primitives et d'intégrales

1	Calculs de primitives et d'intégrales	2
1.1	Primitives d'une fonction continue	2
1.2	Intégrale sur un segment	3
1.3	Calcul de primitives	5
1.4	Primitives usuelles	6
2	Intégration par parties et changement de variable	6
2.1	Intégration par parties	6
2.2	Changement de variable	8
3	Primitives de fractions rationnelles	9
3.1	Décomposition en éléments simples	9
3.2	Calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle	11

Compétences attendues.

- ✓ Étudier une fonction définie par une intégrale dépendant de ses bornes.
- ✓ Connaitre les primitives usuelles.
- ✓ Calculer une primitive ou une intégrale à l'aide d'une intégration par parties ou d'un changement de variable.
- ✓ Décomposer en éléments simples et calculer une primitive d'une fraction rationnelle.

1 Calculs de primitives et d'intégrales

Dans ce chapitre, \mathbb{K} désigne l'un des ensembles \mathbb{R} ou \mathbb{C} , I est un intervalle de \mathbb{R} , et f est une fonction définie sur I et à valeurs dans \mathbb{K} .

1.1 Primitives d'une fonction continue

Définition.

On dit que f est de classe \mathcal{C}^1 sur I si f est dérivable sur I de dérivée f' continue sur I .

Définition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle I . On appelle *primitive* de f sur I toute fonction F de classe \mathcal{C}^1 sur I et telle que $F' = f$.

Exemples.

- Une primitive de $x \mapsto x^\alpha$ sur \mathbb{R}_+^* est $x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ si $\alpha \neq -1$, $x \mapsto \ln(x)$ si $\alpha = -1$.
- Soit $\omega \in \mathbb{C}^*$. Une primitive de $x \mapsto e^{\omega x}$ sur \mathbb{R} est $x \mapsto \frac{1}{\omega}e^{\omega x}$.

Remarque. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur un intervalle I . Si F_1 est une primitive de $\operatorname{Re}(f)$ sur I et F_2 une primitive de $\operatorname{Im}(f)$ sur I , une primitive de f sur I est $F = F_1 + iF_2$. Par exemple, une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto 1 + ix$ est $x \mapsto x + i\frac{x^2}{2}$.

Propriété 1 (Lien entre deux primitives d'une même fonction -)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , et soit F une primitive de f sur I .

Une fonction $G : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une primitive de f si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $G = F + \lambda$.

Mise en garde.

Ce résultat a une conséquence immédiate : dès qu'il existe une primitive de f , il en existe une infinité. On se gardera donc bien de parler de **la** primitive de f , mais bien d'**une** primitive de f .

On admet provisoirement le résultat suivant, qui sera démontré plus tard dans l'année.

Théorème 2 (Théorème fondamental de l'analyse, version 1)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Alors f admet une primitive F sur I .

Remarque. Le théorème fondamental de l'analyse garantit l'existence de primitives, mais il ne dit absolument pas comment les trouver.

De manière générale, le calcul de primitives est un problème difficile, contrairement au calcul de dérivées qui est totalement algorithmique (à partir des dérivées usuelles et des opérations sur les fonctions dérivables). À titre d'exemple, la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ admet des primitives, puisqu'elle est continue, mais pourtant il n'est pas possible d'exprimer l'une de ces primitives à l'aide d'opérations sur les fonctions usuelles (résultat difficile dû à Liouville).

1.2 Intégrale sur un segment

Nous donnerons plus tard dans l'année une définition rigoureuse d'une intégrale sur un segment, en lien avec la notion d'aire. Le but de ce chapitre étant avant tout de nous intéresser à l'aspect calculatoire et à la pratique du calcul de primitives, nous nous contenterons provisoirement de la définition suivante (celle manipulée au lycée).

Définition.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Si F est une primitive de f sur I , on pose, pour tout $(a, b) \in I^2$:

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Cette quantité ne dépend pas de la primitive F choisie, et est appelée *intégrale de f sur le segment $[a, b]$* .

Notation.

- La variable d'intégration (notée t dans la définition ci-dessus) est une variable muette, et peut donc être remplacée par n'importe quel autre symbole non utilisé ailleurs.
- La notation dt n'aura pour nous pas d'autre signification et d'intérêt que de nous rappeler sur quelle variable porte l'intégration. Elle aura aussi une utilité pratique lorsque nous effectuerons des changements de variables.
- La notation \int de l'intégrale est due à Leibniz, et correspond au « s long » de l'époque pour évoquer le mot somme. En effet comme nous le verrons plus tard dans l'année, une intégrale peut s'interpréter comme une somme infinie d'aires de rectangles de hauteur $f(t)$ et de base dt infiniment petite.

Propriété 3 (Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue -

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , $a, b, c \in I$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

- *Lien avec les parties réelle et imaginaire* : $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt.$
- *Linéarité* : $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt.$
- *Relation de Chasles* : $\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt.$
- *Inversion des bornes* : $\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt.$

Propriété 4 (Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue réelle - )

Soient f et g des fonctions continues sur un intervalle I à valeurs réelles, et $a, b \in I$.

- *Positivité* : si $f \geq 0$ et $a \leq b$, $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.
- *Croissance* : si $f \leq g$ et $a \leq b$, $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.
- *Nullité de l'intégrale* : si $a < b$ et f est **continue** et **positive** sur $[a, b]$ et telle que $\int_a^b f(t) dt = 0$, alors $f(t) = 0$ pour tout $t \in [a, b]$.
- *Positivité stricte* : si $a < b$ et f est **continue** et **positive** sur $[a, b]$, et s'il existe $t_0 \in [a, b]$ tel que $f(t_0) > 0$, alors $\int_a^b f(t) dt > 0$.

Propriété 5 (Inégalité triangulaire - )

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue sur I , et soient $a, b \in I$ tels que $a \leq b$. Alors :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Théorème 6 (Théorème fondamental de l'analyse, version 2 - )

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit $a \in I$. Alors la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I , et c'est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .

Exemple. La fonction \ln a été définie comme l'unique primitive sur \mathbb{R}_+^* de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1. En d'autres termes, $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

 **Méthode. Dérivabilité et dérivée d'une intégrale dépendant de ses bornes.**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , et u et v des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle J à valeurs dans I . Considérons la fonction $G : x \in J \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$.

Pour montrer que G est de classe \mathcal{C}^1 sur J et calculer sa dérivée, on fixe (arbitrairement) $a \in I$ et on introduit la fonction $F : x \in I \mapsto \int_a^x f(t) dt$. Par le théorème fondamental de l'analyse, F est de classe \mathcal{C}^1 sur I , et $F' = f$. De plus, pour tout $x \in J$:

$$G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt = \int_a^{v(x)} f(t) dt - \int_a^{u(x)} f(t) dt = F(v(x)) - F(u(x)).$$

Ainsi, G est \mathcal{C}^1 sur J en tant que composée de fonctions qui le sont, et pour tout $x \in J$:

$$G'(x) = v'(x)F'(v(x)) - u'(x)F'(u(x)) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$

Exercice 1 Montrer que la fonction $G : x \in]1, +\infty[\mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]1, +\infty[$, et calculer $G'(x)$ pour tout $x \in]1, +\infty[$. Que peut-on en conclure ?

1.3 Calcul de primitives

Notation.

Quand on calcule une primitive $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ d'une fonction continue f , le choix du réel a importe peu car deux choix différents conduisent au même résultat à une constante additive près. On omet ainsi souvent la borne inférieure de l'intégrale quand on calcule une primitive, et on note $\int^x f(t) dt$ n'importe quelle primitive de f . Par exemple :

$$\int^x (t^2 + 2t) dt = \frac{x^3}{3} + x^2.$$

Mais on aurait tout aussi bien pu écrire :

$$\int^x (t^2 + 2t) dt = \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{\pi^2}{6}$$

et aboutir à l'« égalité » suivante, qui peut paraître déroutante :

$$\frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{\pi^2}{6} = \int^x (t^2 + 2t) dt = \frac{x^3}{3} + x^2.$$

Il faut ici bien comprendre que les symboles $=$ qui y figurent ne sont pas de « vrais » symboles d'égalité, mais plutôt des symboles de congruence \equiv modulo l'ensemble des fonctions constantes.

 **Méthode. Primitive de $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ ou $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$.**

Pour déterminer une primitive de $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ ou $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$, il sera souvent plus simple de passer par la forme complexe $x \mapsto e^{(a+ib)x}$, dont on connaît une primitive, et d'en prendre sa partie réelle ou imaginaire.

Exercice 2 Calculer une primitive de $f : x \mapsto e^{2x} \cos x$.

 **Méthode. Primitives des polynômes trigonométriques.**

Pour déterminer des primitives de fonctions qui sont composées de produits de sinus et cosinus, on commence par linéariser ces expressions (généralement en utilisant les formules d'Euler).

Exercice 3 Calculer une primitive de $f : x \mapsto 2 \sin^2(2x) \cos(3x)$.

1.4 Primitives usuelles

FONCTION $x \mapsto \dots$	PRIMITIVE $x \mapsto \dots$	DOMAINE DE VALIDITÉ
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	\mathbb{R}
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	\mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_-^*
$x^n, n \in \mathbb{Z}, n \leq -2$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	\mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_-^*
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	\mathbb{R}_+^*
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	\mathbb{R}_+^*
$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$	\mathbb{R}_+^*
$e^{\omega x}, \omega \in \mathbb{C}^*$	$\frac{1}{\omega}e^{\omega x}$	\mathbb{R}
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	\mathbb{R}
$\cos(x)$	$\sin(x)$	\mathbb{R}
$\tan(x)$	$-\ln(\cos(x))$	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{sh}(x)$	$\operatorname{ch}(x)$	\mathbb{R}
$\operatorname{ch}(x)$	$\operatorname{sh}(x)$	\mathbb{R}
$\operatorname{th}(x)$	$\ln(\operatorname{ch}(x))$	\mathbb{R}
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$] -1, 1[$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	\mathbb{R}
$\frac{1}{(x-a)^2 + b^2}, a \in \mathbb{R}, b > 0$	$\frac{1}{b} \arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)$	\mathbb{R}

HYPOTHÈSES	FONCTION $x \mapsto \dots$	PRIMITIVE $x \mapsto \dots$
$u : I \rightarrow \mathbb{K}$ de classe \mathcal{C}^1 sur I	$u'e^u$	e^u
$u : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 ne s'annulant pas sur I	$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$
$u : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 et strictement positive sur I	$u'u^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$

2 Intégration par parties et changement de variable

2.1 Intégration par parties

Propriété 7 (Intégration par parties -)

Soient f et g deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur le segment $[a, b]$ à valeur dans \mathbb{K} . Alors :

$$\int_a^b f'(t)g(t) dt = \left[f(t)g(t) \right]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t) dt.$$

 **Rédaction.**

En pratique, on procèdera à une intégration par parties en utilisant le tableau suivant :

$$\begin{array}{rcc}
 + & \left| \begin{array}{cc} \text{(Dérivation)} & \text{(Intégration)} \\ \boxed{g} & f' \end{array} \right. & \boxed{\text{fonctions } \mathcal{C}^1} \\
 & \begin{array}{c} \searrow \\ \int \leftarrow \end{array} & \\
 - & \left| \begin{array}{cc} & \\ & g' \end{array} \right. & \boxed{f}
 \end{array}$$

Exercice 4 Calculer $I = \int_1^e t \ln(t) dt$ et $J = \int_0^\pi (t^2 - t + 1) \cos(t) dt$.

Remarque. On peut aussi pratiquer des intégrations par parties sur des intégrales sans borne inférieure pour calculer des primitives. La formule prend dans ce cas la forme suivante :

$$\int^x f'(t)g(t) dt = f(x)g(x) - \int^x f(t)g'(t) dt.$$

Exercice 5 Déterminer des primitives de $x \mapsto \ln(x)$ et de $x \mapsto \arctan(x)$.

La formule d'intégration par parties peut également permettre d'obtenir des relations de récurrence entre des intégrales dépendant d'un ou plusieurs entiers.

Exercice 6 Pour $p, q \in \mathbb{N}$, calculer $I_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt$.

 **Astuce.**

Le choix de la fonction à dériver (et donc de celle à intégrer) n'est pas toujours facile, et il vous faudra un peu d'intuition et d'habitude pour effectuer une intégration par parties. Pour vous y aider, la règle des A.L.P.E.S. peut vous donner un coup de main :

- la lettre A pour les fonctions arcsin, arccos, arctan (mais aussi argsh, argch, argth) ;
- la lettre L pour la fonction logarithme ;
- la lettre P pour fonctions polynomiales ;
- la lettre E pour exponentielle ;
- la lettre S pour sin, cos, tan, sh, ch, th.

Cette règle consiste à dériver en priorité la fonction qui se situe le plus à gauche dans l'ordre des lettres.

2.2 Changement de variable

Propriété 8 (Changement de variable -)

Soient $f : J \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle J , φ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I à valeurs dans J , et $a, b \in I$. Alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Méthode. Comment effectuer un changement de variable ?

La formule précédente n'est pas à apprendre « par cœur », mais est à retrouver à chaque fois que l'on effectue un changement de variable. On veillera pour cela à modifier les trois éléments suivants :

- la variable $x = \varphi(t)$;
- l'élément différentiel $dx = \varphi'(t) dt$;
- les bornes de l'intégrale : si t varie entre a et b , $x = \varphi(t)$ varie entre $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.

Danger.

Il est bien sûr tout à fait autorisé d'effectuer les calculs nécessaires au changement de variable sur votre copie, mais on veillera bien à ne faire figurer qu'une seule des deux variables au cœur d'un symbole intégrale \int .

Exercice 7 Calculer $I = \int_0^1 \frac{e^{2t}}{1 + e^t} dt$.

Méthode. Comment calculer une intégrale d'une fraction rationnelle en e^t ?

Comme dans l'exemple précédent, pour calculer une intégrale d'une fraction rationnelle en e^t , on effectuera le changement de variable $x = e^t$.

Propriété 9 (Intégrale d'une fonction paire/impaire/périodique -)

(1) Soit f une fonction continue sur un segment $[-a, a]$. Alors :

- $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$ si f paire ;
- $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$ si f impaire.

(2) Soit f est une fonction continue sur \mathbb{R} et T périodique. Alors :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt.$$

Remarque. On peut aussi pratiquer des changements de variable sur des intégrales sans borne inférieure pour calculer des primitives. La formule prend dans ce cas la forme suivante :

$$\int^x f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int^{\varphi(x)} f(u) du.$$

Exercice 8 Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^2 + b^2}$ (où $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$).

Exercice 9 Déterminer une primitive sur \mathbb{R}_+^* de $x \mapsto \cos(2 \ln(x))$.

Dans le cas où l'on donne l'ancienne variable en fonction de la nouvelle, il faudra alors prendre garde d'utiliser un changement de variable bijectif afin d'exprimer la nouvelle variable en fonction d'ancienne.

Exercice 10 Calculer une primitive sur $[-1, 1]$ de $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$.

3 Primitives de fractions rationnelles

Définition.

On appelle *fraction rationnelle* toute fonction $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ pour laquelle il existe deux fonctions polynomiales P et Q à coefficients réels avec $Q \neq 0$, et tels que :

- $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$;
- $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Les points où $\frac{P}{Q}$ n'est pas défini sont les racines de Q , qu'on appelle aussi les *pôles* de $\frac{P}{Q}$.

On appelle *degré de la fraction rationnelle* f l'entier noté $\deg(f)$ égal à $\deg(P) - \deg(Q)$.

Dans toute la suite, f désignera une fraction rationnelle $f : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$. Le but de cette section est de présenter des techniques de calcul d'une primitive de f . Nous ne nous intéresserons qu'au cas où $\deg(f) < 0$, ce que nous supposerons dorénavant. Nous verrons dans un chapitre à venir que nous pourrions toujours nous y ramener, quitte à effectuer la division euclidienne de P par Q .

3.1 Décomposition en éléments simples

On admet (provisoirement encore une fois) le résultat suivant.

Propriété 10 (Décomposition en éléments simples lorsque Q est scindé)

Supposons Q de la forme $Q : x \mapsto (x - a_1)^{m_1} \dots (x - a_k)^{m_k}$ où a_1, \dots, a_k des réels deux à deux distincts et $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}^*$. Alors on a existence et unicité de scalaires $\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_{m_1}^{(1)}, \dots, \lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_{m_k}^{(k)} \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$:

$$f(x) = \frac{\lambda_1^{(1)}}{x - a_1} + \frac{\lambda_2^{(1)}}{(x - a_1)^2} + \dots + \frac{\lambda_{m_1}^{(1)}}{(x - a_1)^{m_1}} + \dots + \frac{\lambda_1^{(k)}}{x - a_k} + \dots + \frac{\lambda_{m_k}^{(k)}}{(x - a_k)^{m_k}}. \quad (E)$$

Exercice 11 Sous quelle forme chercher la décomposer en éléments simple de $f_1 : x \mapsto \frac{x-1}{x(x+1)(x+2)}$ et $f_2 : x \mapsto \frac{x^2+2x+1}{(x-1)(x+2)^2}$.

Une fois admis l'existence d'une telle décomposition, il s'agit à présent de savoir comment déterminer les scalaires $\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_{m_k}^{(k)}$. Une première méthode consiste à tout mettre au même dénominateur et à procéder par identification. Bien que fonctionnant toujours, elle peut vite s'avérer laborieuse en termes de calculs. Donnons quelques méthodes plus efficaces.

 **Méthode. Détermination des scalaires dans la décomposition en éléments simples.**

Afin de déterminer les scalaires intervenants dans la décomposition en éléments simples de f , on pourra :

- multiplier pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ l'égalité (E) par $(x - a_i)^{m_i}$, puis évaluer^a en $x = a_i$, ce qu'on notera simplement :

$$\lambda_{m_i}^{(i)} = \left. \frac{(x - a_i)^{m_i} P(x)}{Q(x)} \right|_{x=a_i}.$$

- multiplier (E) par x et faire tendre x vers $+\infty$;
- utiliser la parité éventuelle de f ;
- évaluer (E) en n'importe quel x qui n'est pas un pôle de f .

^aou plus rigoureusement faire tendre x vers a_i , ce qui reviendra au même d'un point de vue calculatoire.

Exercice 12 Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles $f_1 : x \mapsto \frac{3x^2 - 3x - 2}{(x+1)^2(x-3)}$ et $f_2 : x \mapsto \frac{-3x+16}{(x+3)(x-2)^2}$.

Remarque. La fonction polynomiale Q ne pourra pas toujours s'écrire sous forme scindée, c'est-à-dire comme un produit de facteurs de degré 1. Par exemple si Q est la fonction polynomiale $x \mapsto x^3 - 1$, alors $Q(x) = (x-1)(x^2+x+1)$ et nous ne pouvons aller plus loin dans la factorisation réelle, le discriminant de x^2+x+1 étant strictement négatif. Dans ce cas, on procèdera comme suit.

 **Méthode. Décomposition en éléments simples avec facteurs irréductibles de degré 2.**

Lorsque le polynôme Q possède comme facteur dans sa décomposition $(x^2 + bx + c)^m$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$ tels que $b^2 - 4c < 0$, on ajoutera dans la décomposition en éléments simples (E) de $\frac{P}{Q}$ la composante suivante qui correspond à ce facteur :

$$\frac{\lambda_1 x + \mu_1}{x^2 + bx + c} + \frac{\lambda_2 x + \mu_2}{(x^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{\lambda_m x + \mu_m}{(x^2 + bx + c)^m}$$

où $\lambda_1, \mu_1, \dots, \lambda_m, \mu_m \in \mathbb{R}$.

Exercice 13 Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles $f_1 : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^2}$ et $f_2 : x \mapsto \frac{2x + 1}{x^3 - 1}$.

3.2 Calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle

Pour déterminer une primitive d'une fraction rationnelle $f : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$, on commencera par effectuer sa décomposition en éléments simples. Dans le cas où Q est scindé, on se ramène ainsi à une somme de termes de la forme $x \mapsto \frac{1}{(x - a)^r} = (x - a)^{-r}$, dont le calcul d'une primitive ne pose pas de difficulté :

$$\int^x \frac{1}{(t - a)^r} dt = \begin{cases} \frac{1}{-r + 1} (x - a)^{-r+1} = \frac{-1}{r - 1} \frac{1}{(x - a)^{r-1}} & \text{si } r \geq 2 \\ \ln(|x - a|) & \text{si } r = 1 \end{cases}.$$

Le cas général est plus délicat : il nécessite entre autre la recherche d'une primitive de fractions rationnelles de la forme :

$$f : x \mapsto \frac{\lambda x + \mu}{ax^2 + bx + c}$$

où a, b, c, λ et μ sont des réels tels que $b^2 - 4ac < 0$. Quitte à factoriser par $\frac{\lambda}{a}$, on peut supposer $a = 1$ et $\lambda = 1$. On met alors sous forme canonique le polynôme au dénominateur :

$$f(x) = \frac{x + \mu}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}$$

puis on fait apparaître la dérivée $\frac{u'}{u}$ d'un logarithme :

$$\frac{x + \mu}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} = \frac{x - \alpha}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} + (\alpha + \mu) \frac{1}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}$$

dont une primitive est :

$$x \mapsto \frac{1}{2} \ln((x - \alpha)^2 + \beta^2) + \frac{\alpha + \mu}{\beta} \arctan\left(\frac{x - \alpha}{\beta}\right).$$

Exercice 14 Déterminer une primitive de $f_1 : x \mapsto \frac{2x + 1}{x^3 - 1}$ et $f_2 : x \mapsto \frac{x}{(x + 1)^2(x^2 + 2x + 3)}$.