Chapitre 25

Intégration

Compétences attendues.

- ✓ Connaître les règles de manipulations des intégrales.
- ✓ Connaître le théorème fondamental de l'analyse et l'exploiter pour l'étude des fonctions dépendant de leurs bornes.
- ✓ Connaître et exploiter les formules de Taylor.
- ✓ Reconnaitre une somme de Riemann et préciser sa limite.

Mathieu Mansuy - Professeur en MP2I au Lycée Carnot (Dijon)
Page personnelle : `mathieu-mansuy.fr/`
E-mail : `mathieu.mansuy@ac-dijon.fr`

Motivations et notations

Dans le **Chapitre 9. Calcul de primitives et d'intégrales**, nous avons défini l'intégrale d'une fonction continue à l'aide d'une primitive. Cette définition présente cependant quelques lacunes :

- on a admis l'existence de primitive(s) d'une fonction continue ;
- elle n'explique en rien le lien entre l'aire et l'intégrale ;
- elle nécessite des fonctions continues, et par exemple n'autorise pas à calculer $\int_0^2 \lfloor t \rfloor \, dt$, alors que graphiquement au moins, on se fait une bonne idée de ce que doit valoir cette intégrale.

Le but de ce chapitre est de reconstruire **rigoureusement** l'intégrale en repartant de zéro, pour une classe plus large de fonctions, les fonctions continues par morceaux sur un segment.

Dans tout ce chapitre, a et b désignent des réels, et $\mathbb{K}$ est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Fonctions uniformément continues

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction définie sur un intervalle I.

On dit que f est *uniformément continue sur I* si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in I, \Big(|x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\Big).$$

Remarque. Notons tout de suite la différence avec la continuité : une fonction f est continue sur I si elle est continue en tout point de I. Soit si, et seulement si :

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in I, \Big(|x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\Big).$$

La différence réside donc **dans l'ordre des quantificateurs** : pour une fonction continue, le réel η dépend du point x choisi et de ε, et on pourrait le préciser en le notant $\eta_{x,\varepsilon}$. Pour une fonction uniformément continue, le réel η ne dépend que de ε, et pas du choix de x, et pourrait se noter η_ε plus précisément.

Propriété 1

Une fonction uniformément continue sur un intervalle I est continue sur I.

Mise en garde.

La réciproque est fausse : une fonction peut être continue sur I et pas uniformément continue sur I.

Par exemple la fonction $f = \exp$ qui est continue sur $\mathbb{R}$. Prenons $\varepsilon = 1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$:

$$|f(x+h) - f(x)| = e^{x+h} - e^x = e^x \left(e^h - 1\right) \geq h e^x.$$

Pour tout $\eta > 0$, prenons $h = \frac{\eta}{2}$ et $x = -\ln\left(\frac{\eta}{2}\right)$. Alors :

$$|f(x+h) - f(x)| \geq \frac{\eta}{2} \times \frac{2}{\eta} = 1.$$

Ainsi :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \Big(|x-y| < \eta \ \text{ et } \ |f(x)-f(y)| \geq \varepsilon\Big).$$

Ce qui est bien la négation de f uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Propriété 2

Une fonction lipschitzienne sur un intervalle y est uniformément continue.

Théorème 3 (de Heine)

Soit f une fonction continue sur un **segment** $[a,b]$. Alors f est uniformément continue sur $[a,b]$.

Remarque. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0,1]$. Elle est donc uniformément continue sur $[0,1]$. Elle n'est cependant pas lipschitzienne : sinon, il existerait une constante $k \geq 0$ telle que

$$\forall (x,y) \in [0,1], \quad |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq k|x-y|.$$

Mais alors pour $y = 0$, on obtiendrait pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (avec $x = \frac{1}{n}$) :

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right| \leq \frac{k}{n}, \text{ et donc } \sqrt{n} \leq k$$

ce qui est bien sûr faux. On retiendra donc les implications :

$$f \text{ lipschitzienne sur } I \implies f \text{ uniformément continue sur } I \implies f \text{ continue sur } I.$$

Et les implications réciproques sont toutes fausses en général, la deuxième devenant vraie avec l'hypothèse supplémentaire I **segment** (théorème de Heine).

2 Intégration des fonctions en escaliers

2.1 Fonctions en escaliers

Définition.

On appelle *subdivision du segment* $[a,b]$ toute famille finie $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de $[a,b]$ telle que :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Le réel $\max\limits_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i)$ est appelé le *pas* de σ.

Exemple. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, posons $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$. Alors $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ est une subdivision de $[a,b]$, dite *à pas réguliers*.

Définition.

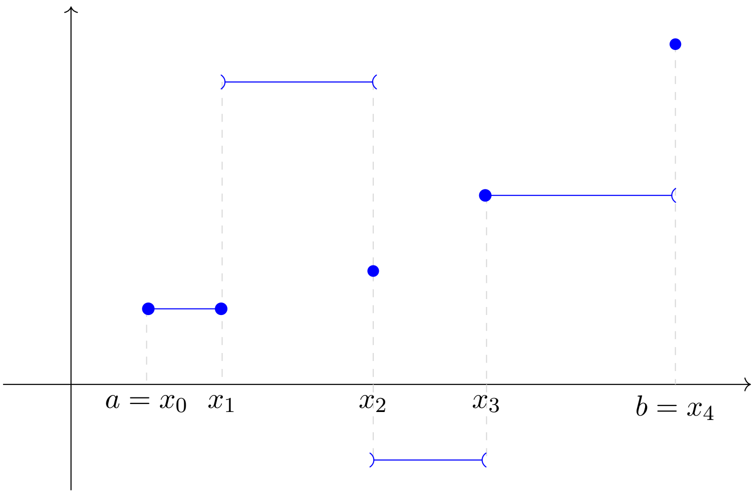
Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ est dite *en escaliers* s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $f_{|]x_i, x_{i+1}[}$ soit constante.

On dit qu'une telle subdivision σ est *adaptée à la fonction en escaliers* f, ou que f est en escaliers *relativement à la subdivision* σ.

On note $\mathscr{E}([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions en escaliers sur $[a, b]$.

Exemples.

- Une fonction constante est en escaliers sur tout segment $[a, b]$, relativement à toute subdivision.
- La fonction partie entière est en escaliers sur tout segment $[a, b]$, relativement à la subdivision de $[a, b]$ constituée de a, b et de tous les entiers contenus dans le segment $[a, b]$.



Un exemple d'une fonction en escaliers.

Remarques.

- Notons qu'on n'impose rien sur la valeur des $f(x_i)$: la fonction f peut être continue à droite ou non en x_i, continue à gauche ou non en x_i.
- Il n'y a pas unicité d'une subdivision adaptée à f : si $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ est adaptée à f, alors toute subdivision plus fine (c'est-à-dire contenant tous les x_i) l'est encore.

Propriété 4

L'ensemble $\mathscr{E}([a, b], \mathbb{K})$ des fonctions en escaliers est à la fois un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathscr{F}([a, b], \mathbb{K})$.

2.2 Intégrale des fonctions en escaliers

Définition.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ une fonction en escalier sur $[a,b]$, et soit $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f. Pour tout $0 \leq k \leq n-1$, notons c_k la valeur prise par f sur l'intervalle $]x_{k-1}, x_k[$.

On appelle *intégrale de f sur $[a,b]$*, et on note $\displaystyle\int_{[a,b]} f$, $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ le réel défini par :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}).$$

Remarques.

- L'intégrale ne dépend pas des valeurs de f aux points de la subdivision.

- Cette définition est consistante car le réel $I_\sigma(f) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1})$ ne dépend pas de la subdivision σ choisie. En effet :

  – *$I_\sigma(f)$ est invariant si on ajoute un nombre fini de points à $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$.*

  Si $\sigma' = (x_0, \dots, x_{m-1}, y, x_m, \dots, x_n)$, alors σ' est encore adaptée à f. De plus, f est constante égale à c_{m-1} sur $]x_{m-1}, y[$ et $]y, c_m[$, de sorte que :

  $$\begin{aligned} I_{\sigma'}(f) &= c_1(x_1 - x_0) + \cdots + c_{m-1}(y - x_{m-1}) + c_{m-1}(x_m - y) + \cdots + c_n(x_n - x_{n-1}) \\ &= c_1(x_1 - x_0) + \cdots + c_{m-1}(x_m - x_{m-1}) + \cdots + c_n(x_n - x_{n-1}) = I_\sigma(f). \end{aligned}$$

  On étend ce résultat pour l'ajout d'un nombre fini de points par une récurrence immédiate.

  – *$I_\sigma(f)$ ne dépend pas de la subdivision choisie*

  Si σ_1 et σ_2 sont deux subdivisions de $[a,b]$ adaptées à f, alors $\sigma_1 \cup \sigma_2$ est encore une subdivision adaptée à f sur $[a,b]$ plus fine que σ_1 et σ_2. Et d'après ce qui précède :

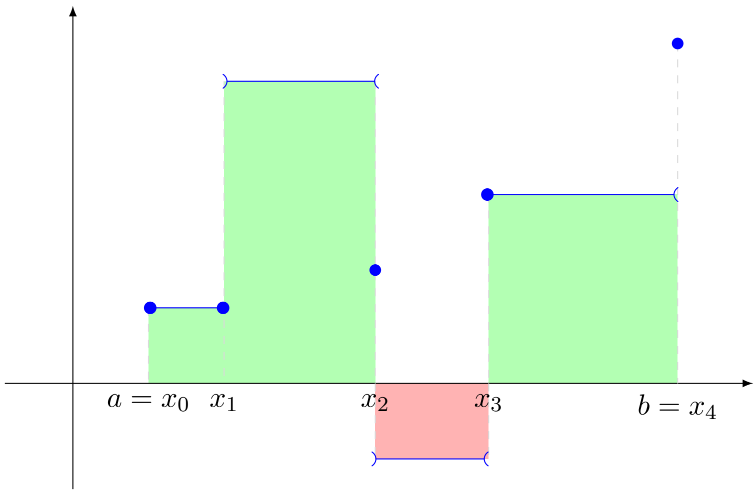
  $$I_{\sigma_1}(f) = I_{\sigma_1 \cup \sigma_2}(f) = I_{\sigma_2}(f).$$

Interprétation géométrique. L'intégrale de f sur $[a,b]$ est la différence $R_+ - R_-$ où :

- R_+ est la somme des aires des rectangles situés au dessus de l'axe des abscisses ;

- R_- est la somme des aires des rectangles situés en dessous de l'axe des abscisses.

Il s'agit de l'*aire algébrique* du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$.



Intégrale d'une fonction en escaliers.

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'intégrale de la partie entière sur $[0, n]$ est égale à :

$$\int_0^n \lfloor t \rfloor \, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Propriété 5

Soient $f, g \in \mathscr{E}([a,b], \mathbb{K})$, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

(1) *Lien avec les parties réelle et imaginaire :* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t.$

(2) *Linéarité :* $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$

(3) *Relation de Chasles :* pour tout $c \in]a, b[$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

(4) *Inégalité triangulaire :* $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$

Propriété 6 (Propriétés de l'intégrale d'une fonction en escalier à valeurs dans $\mathbb{R}$)

Soient $f, g \in \mathscr{E}([a,b], \mathbb{R})$.

- *Positivité :* Si $f \geq 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0.$
- *Croissance :* Si $f \leq g$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$

3 Intégrale des fonctions continues par morceaux sur un segment

3.1 Fonctions continues par morceaux

Définition.

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ est dite *continue par morceaux* s'il existe une subdivision $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$, dite *adaptée à* f, satisfaisant pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$:

- $f_{|]x_i, x_{i+1}[}$ est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$,
- $f_{|]x_i, x_{i+1}[}$ est prolongeable par continuité en x_i et en x_{i+1}.

On note $\mathscr{C}_m([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

Remarques.

- Toute fonction continue sur $[a, b]$ et toute fonction en escaliers sur $[a, b]$ sont continues par morceaux sur $[a, b]$.
- Le fait que $f_{|]x_i, x_{i+1}[}$ soit prolongeable par continuité en x_i et en x_{i+1} se reformule de la manière suivante : f possède des limites finies à droite et à gauche en tous les x_i.

Mise en garde.

Une fonction continue par morceaux n'est pas seulement une fonction avec un nombre fini de points de discontinuité.

Par exemple, la fonction $f : x \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ n'est pas continue par morceaux : elle ne possède pas de limite finie à droite en 0.

Propriété 7

L'ensemble $\mathscr{C}_m([a, b], \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathscr{F}([a, b], \mathbb{K})$.

Propriété 8

Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.

Définition.

Plus généralement, une fonction f définie sur un intervalle I est dite continue par morceaux sur I si pour tout segment $[a, b]$ de I, $f_{|[a,b]}$ est continue par morceaux sur $[a, b]$.

Exemple. La fonction partie entière est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

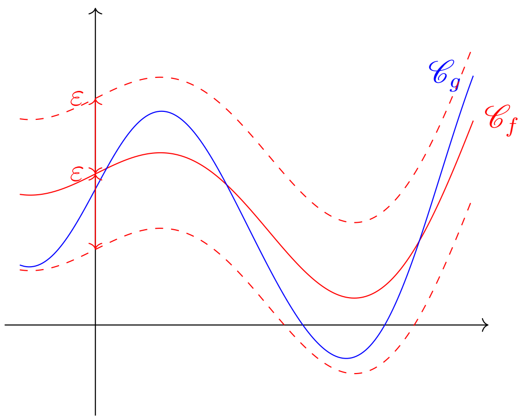
3.2 Approximation uniforme par des fonctions en escaliers

Définition.

Soient $f, g : I \to \mathbb{K}$ des fonctions bornées sur une partie I de $\mathbb{R}$.

- On définit la *norme infinie de f sur I*, et on note $\|f\|_\infty^I$, le réel positif $\|f\|_\infty^I = \sup_{x \in I} |f(x)|$.
- On appelle *distance uniforme entre f et g sur I* le réel $\|f-g\|_\infty^I$.

Remarque. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une fonction g est à une distance uniforme inférieure à $\varepsilon > 0$ de f sur I si **pour tout** $x \in I$, $f(x) - \varepsilon \leq g(x) \leq f(x) + \varepsilon$. Soit graphiquement si sa courbe est contenue dans la bande délimitée par les courbes de $f + \varepsilon$ et $f - \varepsilon$.



Propriété 9

Soients f, g deux fonctions bornées sur une partie I de $\mathbb{R}$, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

(1) *Séparabilité :* $\|f\|_\infty^I = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

(2) *Homogénéité :* $\|\lambda f\|_\infty^I = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty^I$.

(3) *Inégalité triangulaire :* $\|f+g\|_\infty^I \leq \|f\|_\infty^I + \|g\|_\infty^I$.

Dans toute la suite, on considèrera que $I = [a, b]$ est un segment, et pour f bornée sur $[a, b]$, on notera $\|f\|_\infty$ au lieu de $\|f\|_\infty^{[a,b]}$.

Théorème 10 (Approximation uniforme par une fonction en escaliers)

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a, b], \mathbb{K})$ et soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe une fonction en escaliers φ telle que $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$.

Corollaire 11

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a, b], \mathbb{R})$ et soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe deux fonctions en escaliers φ et ψ telles que :

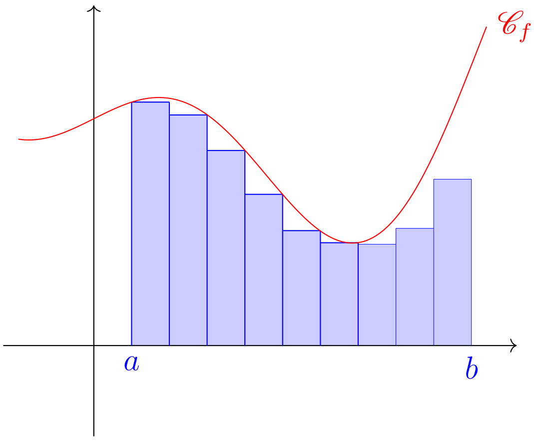
$$\varphi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad \|\psi - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon.$$

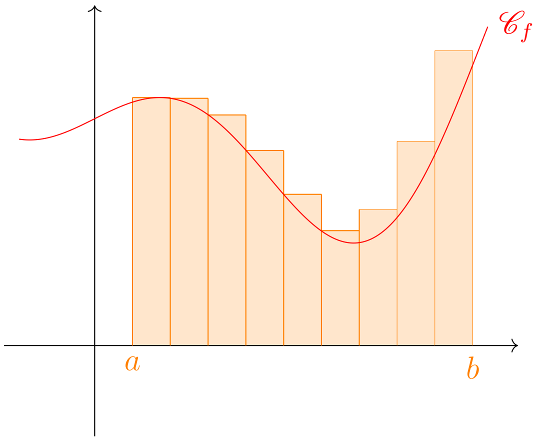
3.3 Intégrale des fonctions continues par morceaux

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Notons :

$$\mathscr{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Si φ et ψ sont des fonctions en escaliers sur $[a, b]$ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$, alors les réels $\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b \psi(t)\,\mathrm{d}t$ donnent intuitivement des approximations par défaut et excès de l'aire algébrique du domaine $\mathscr{D}$.





Pour définir l'aire de $\mathscr{D}$, on est ainsi conduit à introduire les ensembles suivants :

$$\mathscr{E}^+_{[a,b]}(f) = \{\psi \in \mathscr{E}([a, b], \mathbb{R}) \mid \psi \geq f\} \quad \text{et} \quad \mathscr{E}^-_{[a,b]}(f) = \{\varphi \in \mathscr{E}([a, b], \mathbb{R}) \mid \varphi \leq f\}.$$

Théorème 12

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a, b], \mathbb{R})$. Alors :

- $\mathscr{A}^-_{[a,b]}(f) = \left\{ \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \;\middle|\; \varphi \in \mathcal{E}^-_{[a,b]}(f) \right\}$ admet une borne supérieure,
- $\mathscr{A}^+_{[a,b]}(f) = \left\{ \int_a^b \psi(t)\,\mathrm{d}t \;\middle|\; \psi \in \mathscr{E}^+_{[a,b]}(f) \right\}$ admet une borne inférieure,

et ces deux bornes sont égales.

Définition.

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a, b], \mathbb{R})$.

On appelle *intégrale de f sur* $[a, b]$ le réel noté $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ défini par :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sup \left\{ \int_{[a,b]} \varphi \;\middle|\; \varphi \in \mathscr{E}^-_{[a,b]}(f) \right\} = \inf \left\{ \int_a^b \psi(t)\,\mathrm{d}t \;\middle|\; \psi \in \mathscr{E}^+_{[a,b]}(f) \right\}.$$

Interprétation géométrique. $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire algébrique du domaine $\mathscr{D}$ du plan situé entre le graphe de f et l'axe des abscisses (comptée positivement lorsque le graphe est au dessus de l'axe des abscisses, négativement en dessous).

Pour aller plus loin.

Plus généralement, on dit qu'une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est *intégrable au sens de Riemann* sur $[a,b]$ si $\sup\left(\mathscr{A}^-_{[a,b]}(f)\right)$ et $\inf\left(\mathscr{A}^+_{[a,b]}(f)\right)$ existent et sont égales. Et on appelle alors *intégrale de Riemann de f sur* $[a,b]$ ce réel.

On vient d'établir au Théorème 12 que les fonctions continues par morceaux sur un segment $[a,b]$ sont toutes intégrables au sens de Riemann sur $[a,b]$.

Il existe des fonctions intégrables au sens de Riemann qui ne sont pas continues par morceaux, par exemple la fonction $f : x \in [0,1] \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Il existe également des fonctions bornées non intégrables au sens de Riemann. On peut montrer par exemple pour la fonction caractéristique f de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ que $\sup\left(\mathscr{A}^-_{[a,b]}(f)\right) = 0$ et $\inf\left(\mathscr{A}^+_{[a,b]}(f)\right) = 1$. Elle n'est donc pas intégrable au sens de Riemann.

3.4 Propriétés de l'intégrale

Propriété 13

Soient $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Si $\varphi \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$ satisfait $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$, alors :

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq (b-a)\varepsilon.$$

Propriété 14 (Linéarité de l'intégrale)

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\int_a^b (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Corollaire 15

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$. Si f et g ne diffèrent qu'en un nombre fini de points, alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Propriété 16 (Relation de Chasles)

Soient $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$ et $c \in \,]a,b[$. Alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Notation.

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$. On pose :

- $\displaystyle\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$,
- $\displaystyle\int_c^c f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout $c \in [a,b]$.

On vérifie que la relation de Chasles et la linéarité sont encore valables pour des a, b, c quelconques.

Propriété 17

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m(I,\mathbb{R})$ et $a, b \in I$.

(1) *Positivité :* si $f \geq 0$ et $a \leq b$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$.

(2) *Croissance :* si $f \leq g$ et $a \leq b$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

(3) *Inégalité triangulaire :* si $a \leq b$, alors $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Remarque. La majoration suivante, vraie également si $b < a$, peut être utile :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \left|\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t\right|.$$

Propriété 18 (Nullité de l'intégrale)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** et **positive** sur $[a,b]$.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ si, et seulement si, f est nulle sur $[a,b]$.

Corollaire 19 (Stricte positivité de l'intégrale)

Soient $a < b$ et soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$ une fonction strictement positive sur $[a,b]$, sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$.

3.5 Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Remarque. Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux si, et seulement si, les deux fonctions réelles $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) : [a,b] \to \mathbb{R}$ le sont.

Définition.

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{C})$.

On appelle *intégrale de f sur $[a,b]$* le nombre complexe, noté $\displaystyle\int_{[a,b]} f$, $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, défini par :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}(f)(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \mathrm{Im}(f)(t)\,\mathrm{d}t.$$

Propriété 20

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m(I,\mathbb{C})$, $a, b, c \in I$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

(1) *Linéarité :* $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

(2) *Relation de Chasles :* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

(3) *Inégalité triangulaire :* si $a \leq b$, alors $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

4 Intégrales et calcul différentiel

4.1 Le théorème fondamental de l'analyse

Théorème 21 (Théorème fondamental de l'analyse)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction **continue** sur I.

(1) La fonction $F : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.

(2) Pour toute primitive $F : I \to \mathbb{K}$ de f :

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a).$$

Pour aller plus loin.

Si on suppose seulement f continue par morceaux sur I, alors on montre de manière analogue que la fonction $F : x \in I \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est :

- continue en tout point x_0 de I ;
- dérivable en tout point x_0 de continuité de f, avec $F'(x_0) = f(x_0)$;

- dérivable à gauche et à droite en tout point x_0 de discontinuité de f, avec :

$$F_g'(x_0) = f(x_0 - 0) \quad \text{et} \quad F_d'(x_0) = f(x_0 + 0).$$

4.2 Intégrales dépendant de leurs bornes

Soient $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle I, u et v des fonctions définies sur un intervalle J à valeurs dans I. On se propose d'étudier la fonction :

$$G : x \in J \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En fixant (arbitrairement) $a \in I$ et en notant $F : x \in I \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, on ramène l'étude de G à celle de F en remarquant que :

$$G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = F(v(x)) - F(u(x)).$$

On peut alors par exemple établir le résultat suivant.

Propriété 22

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $u, v : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur I à valeurs dans J, et soit $f : J \to \mathbb{K}$ continue.
La fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et :

$$\forall x \in I,\ G'(x) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

Exercice 1 Étudier les variations et les limites aux bornes de la fonction $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Psi(x) = \int_x^{3x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

4.3 Techniques de calcul d'intégrales

Nous ne donnerons pas dans ce chapitre de nouveaux outils pour le calcul d'intégrales, mais notons que maintenant que l'intégrale est correctement définie, tout ce qui a été prouvé précédemment, notamment sur le changement de variable et l'intégration par parties, est désormais correctement justifié.

Attention toutefois aux hypothèses : l'intégration par parties nécessite toujours des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, et le changement de variable un intégrande (c'est-à-dire la fonction intégrée) continu.

Si on souhaite utiliser l'une ou l'autre de ces méthodes pour calculer des intégrales de fonctions continues par morceaux, il faudra commencer par utiliser la relation de Chasles afin de se ramener à des segments où l'utilisation de ces théorèmes est légitime.

4.4 Les formules de Taylor

Nous donnons dans cette partie deux nouvelles formules de Taylor (1685 - 1731), qui viennent préciser globalement (c'est-à-dire pas seulement au voisinage de a) ce que dit la formule de Taylor-Young.

Théorème 23 (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I, et soit $a \in I$. Alors pour tout $x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \, \mathrm{d}t.$$

Exercice 2 Montrer que pour tout $x \in [0, \pi/2]$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

Propriété 24 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I, et soient $(a, b) \in I^2$. Notons J le segment d'extrémités a et b, et soit M un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur J. Alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Exercice 3 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

On peut alors retrouver la formule de Taylor-Young, permettant d'approximer localement la fonction f par son polynôme de Taylor en a.

Propriété 25 (Formule de Taylor-Young)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I, et soit $a \in I$. Alors :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n).$$

5 Sommes de Riemann

Définition.

Soient $a < b$ deux réels. On appelle *subdivision pointée de l'intervalle* $[a, b]$ la donnée d'un couple $s = \left(\sigma, (t_i)_{1 \leq i \leq n}\right)$ où :

- $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une subdivision de $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$;
- pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, t_i appartient à l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$.

On appelle alors *pas de s* et on note $\delta(s)$ le pas de la subdivision σ.

Définition.

Si $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$ et si $s = \left(\sigma, (t_i)_{1\leq i\leq n}\right)$ est une subdivision pointée de $[a,b]$, alors on note :

$$R(f,s) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(t_i)\,.$$

Le réel $R(f,s)$ est appelé *somme de Riemann associée à f et s.*

Propriété 26

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, à valeurs réelles.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute subdivision pointée s de $[a,b]$, si $\delta(s) \leq \eta$, alors :

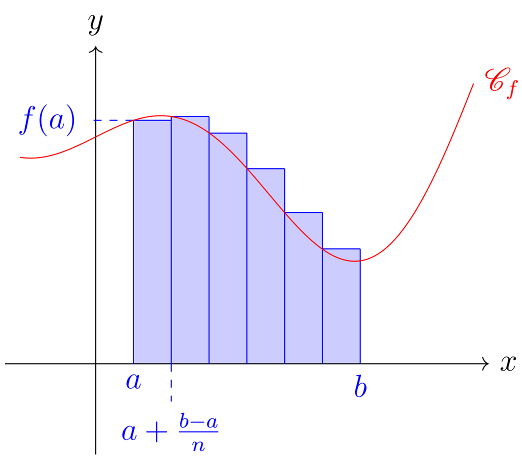
$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - R(f,s)\right| \leq \varepsilon.$$

Cas particuliers importants. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la subdivision régulière $\sigma = (x_k)_{0\leq k\leq n}$ de $[a,b]$ définie par $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ pour tout $0 \leq k \leq n$. Parmi toutes les manières de considérer des subdivisions pointées, deux sont sans doute un peu plus « naturelles » que les autres :

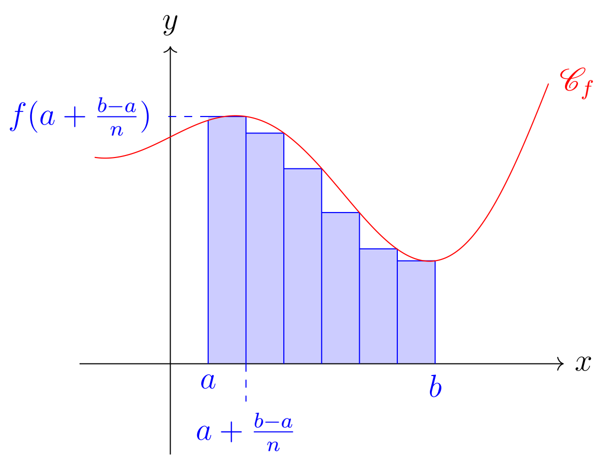
- prendre $t_i = x_{i-1}$, la borne de gauche de $[x_{i-1}, x_i]$. On parle alors de la *méthode des rectangles à gauche.*

- prendre $t_i = x_i$, la borne de droite de $[x_{i-1}, x_i]$. On parle alors de la *méthode des rectangles à droite.*

Graphiquement, $R(f,s)$ est l'approximation de l'aire sous la courbe de f par des rectangles de hauteur $f(t_i)$.



Méthode des rectangles à gauche.

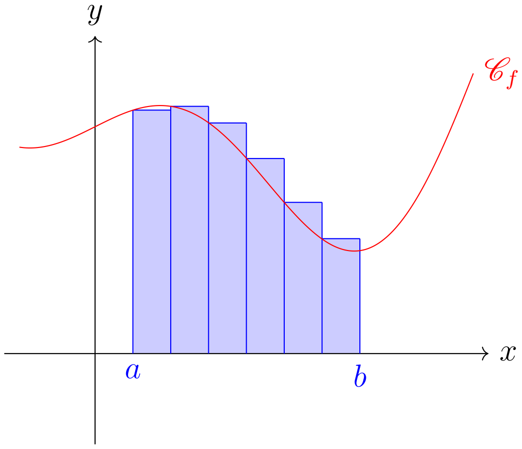


Méthode des rectangles à droite.

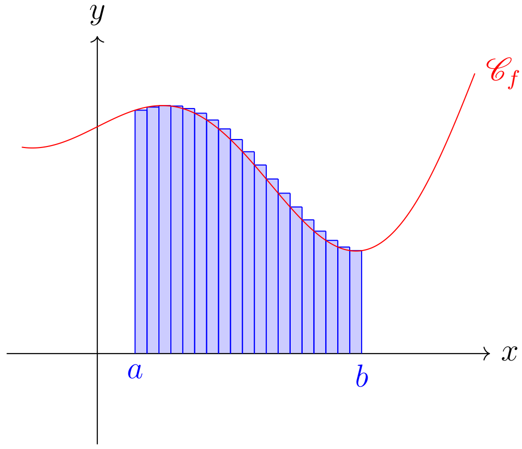
Théorème 27 (Convergence des sommes de Riemann)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).\end{aligned}$$



$n = 6$.



$n = 20$.

Illustration de la convergence des sommes de Riemann vers l'intégrale.

Méthode. Comment reconnaître une somme de Riemann et la calculer ?

En pratique, on pourra penser à une somme de Riemann lorsque la suite (u_n) considérée est définie par une somme finie de n termes et que le terme général de cette somme dépend également de n.

On pensera à faire apparaître un facteur $\frac{1}{n}$ devant la somme, et il s'agira d'identifier une fonction f telle que $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ (on prendra $a = 0$ et $b = 1$ dans le théorème ci-dessus).

Exercice 4 Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$. Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ converge et déterminer sa limite.