Chapitre 24b

Espaces vectoriels de dimension finie

Compétences attendues.

✓ Extraire une base d'une famille génératrice finie, compléter une famille libre en une base.

✓ Expliciter une base d'un espace vectoriel pour en déterminer la dimension.

✓ Exploiter un argument de dimension pour montrer l'égalité de deux sous-espaces, pour montrer qu'une famille est une base ou pour montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires.

✓ Calculer le rang d'une famille de vecteurs.

Mathieu Mansuy - Professeur en MP2I au Lycée Carnot (Dijon)

Page personnelle : `mathieu-mansuy.fr/`

E-mail : `mathieu.mansuy@ac-dijon.fr`

1 Dimension d'un espace vectoriel

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, mais tous les résultats énoncés restent valables pour un corps quelconque.

1.1 Espaces vectoriels de dimension finie

Définition.

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dit *de dimension finie* s'il possède une famille génératrice finie.
Dans le cas contraire, on dit que E est de *dimension infinie*.

Exemples.

- $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont de dimension finie, puisqu'on en connait des bases finies (que nous avons appelées canoniques), et donc des familles génératrices finies.
- $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie. En effet, pour toute famille finie $(P_1, \ldots, P_r)$ de $\mathbb{K}[X]$, $\mathrm{Vect}(P_1, \ldots, P_r) \subset \mathbb{K}_d[X]$ où $d = \max\left(\{\deg(P_i),\ i \in [\![1, r]\!]\} \cup \{0\}\right)$, et donc par exemple $X^{d+1} \notin \mathrm{Vect}(P_1, \ldots, P_r)$.

Théorème 1 (Théorème de la base extraite)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
De toute famille génératrice finie de E, on peut extraire une base (finie) de E.

Corollaire 2 (Existence de base dans un espace vectoriel de dimension finie)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors E admet au moins une base finie.

Propriété 3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathscr{L} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E et $\mathscr{G} = (f_1, \ldots, f_p)$ une famille génératrice de E.
Alors on peut compléter $\mathscr{L}$ à l'aide d'éléments de $\mathscr{G}$ en une base de E.

Théorème 4 (Théorème de la base incomplète)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$. Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

1.2 Dimension d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Propriété 5 (Lemme de l'échange)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant une base de cardinal n. Alors toute famille constituée d'au moins $n + 1$ vecteurs est liée.

Corollaire 6

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases ont même nombre d'éléments.

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$. On appelle *dimension de E*, et on note $\dim(E)$, le cardinal commun à chacune de ses bases.
Si $E = \{0\}$, on pose par convention $\dim(E) = 0$.

Exercice 1 Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels suivants.

$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + 3y + z = 0\}$.

$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ et } x - 3y = 0\}$.

$E_3 = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}(M) = 0\}$.

Définition.

Un espace vectoriel de dimension 1 est appelé une *droite (vectorielle)*, un espace de dimension 2 est appelé un *plan (vectoriel)*.

Exemples.

- Si x est un vecteur non nul d'un espace vectoriel E, alors $\operatorname{Vect}(x)$ est une droite vectorielle.
- Si x et y sont des vecteurs non colinéaires de E, alors $\operatorname{Vect}(x, y)$ est un plan vectoriel.

1.3 Dimension des espaces vectoriels usuels

Propriété 7

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+\mathbf{1}$.
- Pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$, $\dim(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = n \times p$.

Exemples.

- Pour une fonction continue $a : I \to \mathbb{K}$, nous avons montré que l'ensemble des solutions de $y' + a(t)y = 0$ est :
$$\mathscr{S}_0 = \{t \in I \mapsto \lambda e^{-A(t)},\ \lambda \in \mathbb{K}\}.$$
Il s'agit d'une droite vectorielle (de dimension 1), dont une base est formée de la fonction $t \mapsto e^{-A(t)}$.
- De même, nous avons montré que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, homogène, à coefficients constants est un plan vectoriel (de dimension 2).

Il faut pour cela distinguer plusieurs cas. Par exemple pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dans le cas où l'équation caractéristique possède deux solutions distinctes r_1 et r_2, les fonctions $t \mapsto e^{r_1 t}$ et $t \mapsto e^{r_2 t}$ forment une base[1] de l'ensemble des solutions.

- Nous avons également montré que l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants est un plan vectoriel (de dimension 2).

  Il s'agit là aussi de distinguer plusieurs cas. Par exemple, pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, dans le cas où l'équation caractéristique possède une racine double r, les suites $n \mapsto r^n$ et $n \mapsto nr^n$ forment une base de cet espace.

Propriété 8

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $E \times F$ est de dimension finie, et :

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F).$$

Remarque. Par récurrence immédiate, on montre que si $E_1, \dots, E_n$ sont des espaces vectoriels de dimension finie, alors $E_1 \times \cdots \times E_n$ est de dimension finie et :

$$\dim(E_1 \times \cdots \times E_n) = \dim(E_1) + \cdots + \dim(E_n).$$

1.4 Cardinal des familles libres et génératrices

Propriété 9

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

(1) Toute famille libre de E admet au plus n éléments.

(2) Toute famille génératrice de E admet au moins n éléments.

Propriété 10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{F}$ une famille **formée de n éléments**. Il y a équivalence entre :

(1) $\mathscr{F}$ est une base de E ; (2) $\mathscr{F}$ est libre ; (3) $\mathscr{F}$ est génératrice de E.

Méthode. Comment montrer qu'une famille est une base lorsque $\dim(E)$ est connue ?

Il est généralement pénible d'établir qu'une famille est génératrice, alors que la liberté est souvent plus simple à montrer. Aussi, autant que possible, lorsqu'il s'agit de prouver qu'une famille est une base d'un espace vectoriel E, on montrera qu'elle est libre et contient $\dim(E)$ vecteurs. Ceci nécessite bien entendu de connaître la dimension de E.

[1] Nous avons plus précisément montré que ces fonctions engendrent l'espace des solutions. Et elles forment une famille libre car constituée de **deux** vecteurs non colinéaires.

Exercice 2 Montrer que $((0,1,2),(1,2,0),(2,0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Notons $\mathscr{B} = (L_0, L_1, \dots, L_n)$ la famille des polynômes de Lagrange associée à ces scalaires. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, et préciser les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base.

2 Sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie

2.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Propriété 11

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E. Alors :

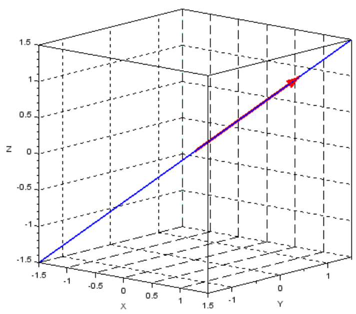
(1) F est de dimension finie, et $\dim(F) \leq \dim(E)$;

(2) $F = E$ si, et seulement si, $\dim(F) = \dim(E)$.

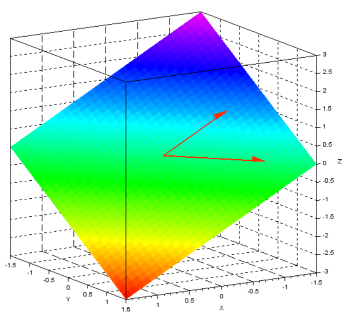
Exercice 4 Montrer que les sous-espaces vectoriels $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}((1,1,1),(1,-2,-1))$ de $\mathbb{R}^3$ sont égaux.

Remarque. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On est dans l'un des cas suivants :

- $\dim(F) = 0$, et alors $F = \{0_E\}$;
- $\dim(F) = 1$, et alors F est une droite vectorielle ;
- $\dim(F) = 2$, et alors F est un plan vectoriel ;
- $\dim(F) = 3$, et dans ce cas $F = \mathbb{R}^3$.



Sous-espace vectoriel de dimension 1, dont une base est constituée du vecteur en rouge.



Sous-espace vectoriel de dimension 2, dont une base est constituée des deux vecteurs en rouges.

2.2 Rang d'une famille de vecteurs

Définition.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E.
On appelle rang de $(e_1, \dots, e_p)$, et on note $\mathrm{rg}(e_1, \dots, e_p)$, la dimension de $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.

Remarque. Le rang d'une famille finie de vecteurs est bien défini puisque $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ est de dimension finie : il admet $(e_1, \dots, e_p)$ comme famille génératrice finie.

Propriété 12

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dimension finie n, et soit $(e_1, \dots, e_p) \in E^p$. Alors :

(1) $\mathrm{rg}(e_1, \dots, e_p) \leq \min(p, n)$.

(2) La famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre si, et seulement si, $\mathrm{rg}(e_1, \dots, e_p) = p$.

(3) La famille $(e_1, \dots, e_p)$ est génératrice de E si, et seulement si, $\mathrm{rg}(e_1, \dots, e_p) = n$.

Exercice 5 Déterminer le rang de la famille constituée des vecteurs suivants :

$$x_1 = (1, -1, 1),\ x_2 = (-1, 1, -1),\ x_3 = (0, 1, 1),\ x_4 = (1, 0, 2).$$

Méthode. Comment déterminer le rang d'une famille $\mathscr{F}$ et une base de $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$?

Pour obtenir le rang d'une famille $\mathscr{F} = (e_1, \dots, e_p)$, on résout le système :

$$\alpha_1 \cdot e_1 + \cdots + \alpha_p \cdot e_p = 0_E$$

d'inconnues $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$. Après la mise sous forme triangulaire par l'algorithme de Gauss, on identifie inconnues principales et inconnues paramètres. Alors :

- *$\mathrm{rg}(\mathscr{F})$ est égal au nombre d'inconnues principales (ou nombre de pivots) du système ;*
- *une base de $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ est formée des vecteurs associés aux inconnues principales.*

2.3 Dimension d'une somme de deux sous-espaces

Propriété 13 *(Formule de Grassmann)*

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque E. Alors $F + G$ et $F \cap G$ sont de dimensions finies, et :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

En particulier, $\dim(F + G) \leq \dim(F) + \dim(G)$.

Le saviez-vous ?

Hermann Grassmann (1809-1877)

Hermann Grassmann (1809-1877) est l'un des grands mathématiciens « malheureux » du 19$^{\text{ème}}$ siècle. En 1839 dans sa thèse sur la *Théorie des flots et des marées*, il établit les fondements de la théorie des espaces vectoriels et de l'algèbre linéaire. Ces travaux, bien que révolutionnaires, n'auront que peu d'échos chez ses contemporains. Le rapporteur de sa thèse ayant à lire un essai remarquablement long, en bâcle la lecture en quatre jours et en rate complètement l'importance fondamentale. En 1844, son ouvrage majeur *La science des grandeurs extensives ou la théorie de l'espace*, première publication importante dans le cadre de la théorie des espaces vectoriels, passe aussi pratiquement inaperçu.

Ce n'est que bien plus tard que viendra la reconnaissance pour Grassmann. D'abord par William Rowan Hamilton qui lui rend hommage dans son ouvrage de 1853 sur les quaternions. C'est ensuite Hermann Hankel et Félix Klein, enthousiasmés par ses théories, qui le recommandent à l'Académie des sciences de Göttingen en 1871. Ses travaux sont reconnus par Peano en 1888, trente ans après leur première publication.

Exercice 6 On considère deux plans vectoriels P_1 et P_2 de $\mathbb{R}^3$ non confondus. Montrer que $P_1 \cap P_2$ est une droite vectorielle.

Propriété 14 (Caractérisation d'une somme directe en dimension finie)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E, $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ des bases de F et G. Il y a équivalence entre :

(1) F et G sont en somme directe ;

(2) la concaténation de $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ est une base de $F+G$;

(3) $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G)$.

2.4 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Théorème 15 (Première caractérisation en dimension finie)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F et G des sous-espaces vectoriels de E de bases respectives $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$. Alors :

$$E = F \oplus G \quad \Leftrightarrow \quad \text{la concaténation de } \mathscr{B}_F \text{ et } \mathscr{B}_G \text{ est une base de } E.$$

On dit alors que la base de E ainsi obtenue en concaténant $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ est *adaptée à la décomposition en somme directe* $E = F \oplus G$.

Théorème 16 (Deuxième caractérisation en dimension finie)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous espaces vectoriels de E. Il y a équivalence entre :

(1) $E = F \oplus G$ (2) $\begin{cases} E = F + G \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{cases}$ (3) $\begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{cases}$

Propriété 17

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soit F un sous-espace vectoriel de E.
Alors il existe au moins un supplémentaire de F dans E. De plus, tous les supplémentaires de F dans E ont même dimension $\dim(E) - \dim(F)$.

2.5 Somme et somme directe de p sous-espaces

Les résultats des deux sections précédentes s'étendent comme suit au cas d'une somme d'une famille de p sous-espaces $(F_i)_{1 \leq i \leq p}$ d'un espace vectoriel E.

Propriété 18

Si les F_i sont de dimension finie, alors $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est de dimension finie et :

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i).$$

Propriété 19

Soient $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E, et $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_p$ des bases respectives de ces espaces.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) les sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_p$ sont en somme directe ;

(2) la concaténation des $\mathscr{B}_i$ est une base de $\sum_{i=1}^{p} F_i$;

(3) $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$.

Propriété 20

Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.
Si deux des trois assertions suivantes sont vérifiées :

(i) $E = \sum_{i=1}^{p} F_i$, (ii) $\sum_{i=1}^{p} F_i = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$, (iii) $\dim(E) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$,

alors $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.

Propriété 21

Soient $F_1, \dots, F_p$ p sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie, et $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_p$ des bases respectives de ces espaces.

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i \text{ si, et seulement si, la concaténation des } \mathscr{B}_i \text{ est une base de } E.$$

3 Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

Dans cette section, on désigne par E un espace vectoriel.

3.1 Structure affine d'un espace vectoriel

Pour se faire une intuition, prenons le cas $E = \mathbb{R}^2$. Un couple de réels peut être vu de deux façons :

- comme un **vecteur**, c'est ce que nous avons fait dans toute l'algèbre linéaire ;
- comme un **point**, c'est ce que vous avez pu faire au lycée.

Et on passe naturellement d'un point de vue à l'autre :

- à tout couple (A, B) de points du plan correspond un unique vecteur, le vecteur $\overrightarrow{AB}$;
- inversement, si on se fixe A un point et $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan, alors il existe un unique point B tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$: c'est le translaté de A par $\overrightarrow{u}$.

Pour un espace vectoriel quelconque E, on peut de même considérer un élément de E comme un vecteur de l'espace vectoriel $(E, +, \cdot)$, ou comme un point de l'ensemble E (qu'on appelle l'*espace affine* E pour le distinguer de l'*espace vectoriel* E). Au lieu d'utiliser les notations vectorielles usuelles, on utilise alors plutôt les notations géométriques suivantes :

- on écrit $A, B, M, \dots$ plutôt que $a, b, m, \dots$ les éléments considérés comme des points ;
- on écrit $\overrightarrow{AM}$ le vecteur $M - A$, et l'égalité $M = A + (M - A)$ devient $M = A + \overrightarrow{AM}$.

L'application $(A, M) \in E \times E \mapsto \overrightarrow{AM} \in E$ jouit des propriétés suivantes :

- pour tout point $A \in E$, l'application $M \in E \mapsto \overrightarrow{AM} \in E$ est bijective (il s'agit d'une bijection de l'espace affine E dans l'espace vectoriel E) ;

- pour tout triplet (A, B, C) de E, on a la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (B - A) + (C - B) = C - A = \overrightarrow{AC}.$$

3.2 Translations, sous-espaces affines

Définition.

Soit $a \in E$. On appelle *translation de vecteur a* l'application $\tau_a : E \to E$ définie par :

- en notation vectorielle : pour tout $x \in E$, $\tau_a(x) = x + a$;
- en notation géométrique : pour tout $M \in E$, $\tau_a(M) = M + a$.

Propriété 22

- $\tau_{0_E} = \mathrm{id}_E$ et pour tous $a, b \in E$, $\tau_a \circ \tau_b = \tau_{a+b}$.
  En particulier, τ_a est bijective et $\tau_a^{-1} = \tau_{-a}$.
- L'ensemble $\mathscr{T}(E)$ des translations de E est un groupe commutatif isomorphe à $(E, +)$.

Définition.

On appelle *sous-espace affine de E* toute partie de E de la forme $\tau_a(F)$, obtenue par translation par un vecteur $a \in E$ d'un sous-espace vectoriel F de E, c'est-à-dire :

- en notation vectorielle :

$$\mathscr{F} = a + F = \{a + x,\, x \in F\} = \{m \in E \mid m - a \in F\}.$$

- en notation géométrique, en notant plutôt A l'élément $a \in E$:

$$\mathscr{F} = A + F = \{A + x,\, x \in F\} = \{M \in E \mid \overrightarrow{AM} \in F\}.$$

Propriété 23

Soit $\mathscr{F} = a + F$ un sous-espace affine de E, où $a \in E$ et F est un sous-espace vectoriel de E. Alors $a \in \mathscr{F}$ et le sous-espace F est unique : si $b \in E$ et G sous-espace vectoriel de E sont tels que $\mathscr{F} = b + G$, alors $F = G$.

Définition.

Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de E. L'unique sous-espace vectoriel F dont $\mathscr{F}$ se déduit par translation est appelé la *direction de* $\mathscr{F}$.
Si $\mathscr{F} = a + F$, on dit que $\mathscr{F}$ est le *sous-espace affine de direction F et passant par a*.

Remarques.

- Tout sous-espace affine est entièrement caractérisé par la donnée de sa direction et de n'importe lequel de ses points.
- Tout sous-espace vectoriel F peut être considéré comme le sous-espace affine de direction F passant par 0_E. En revanche, un sous-espace affine n'est pas un sous-espace vectoriel, sauf s'il passe par 0_E.

Définition.

Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de E de direction F.
Si F est de dimension finie, alors on dit que $\mathscr{F}$ est de dimension finie, et on pose $\dim(\mathscr{F}) = \dim(F)$.
Si $\dim(\mathscr{F}) = 1$, on dit que $\mathscr{F}$ est une droite affine. Si $\dim(\mathscr{F}) = 2$, on dit que $\mathscr{F}$ est un plan affine.

Remarque. Un sous-espace affine de dimension 0 est de la forme $a + \{0_E\} = \{a\}$: c'est un point.

Exemples.

- L'ensemble des solutions d'un système linéaire de n équations à p inconnues est un sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$ de direction l'ensemble des solutions du système homogène associé et passant par une solution particulière du système.
- L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire $(E)\ :\ y' + a(t)y = b(t)$ est une droite affine de $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$ dirigée par $\mathrm{Vect}(t \mapsto e^{-A(t)})$ (où A est une primitive de a) passant par une solution particulière de (E).
- L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants est un plan affine de $\mathscr{C}^2(I, \mathbb{K})$ dirigée par l'ensemble des solutions de l'équation homogène et passant par une solution particulière.

3.3 Intersection de sous-espaces affines, parallélisme

Propriété 24

Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de E, de directions respectives F et G.
Alors $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est soit vide, soit un sous-espace affine de direction $F \cap G$.

Définition.

Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de F, de directions respectives F et G.

- Si $F \subset G$, on dit que *$\mathscr{F}$ est parallèle à $\mathscr{G}$*.
- Si $F = G$, on dit que *$\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont parallèles*.

⚠ **Mise en garde.**

La terminologie est un peu surprenante au premier abord, car la relation binaire « être parallèle à » n'est pas symétrique. Par exemple, une droite affine peut être parallèle à un plan affine, mais un plan affine n'est jamais parallèle à une droite affine pour des raisons de dimension.

Propriété 25

Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de E.
Si $\mathscr{F}$ est parallèle à $\mathscr{G}$, alors soit $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} = \emptyset$, soit $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$.