Chapitre 14

Suites numériques

Compétences attendues.

- ✓ Manipuler la définition quantifiée de convergence.
- ✓ Utiliser encadrements et monotonies pour établir la convergence ou la divergence d'une suite réelle.
- ✓ Montrer que deux suites sont adjacentes, et donc convergentes vers la même limite.
- ✓ Utiliser des suites extraites pour montrer qu'une suite n'a pas de limite.
- ✓ Utiliser la caractérisation séquentielle de la borne supérieure.
- ✓ Expliciter des suites arithmético-géométriques et des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

Mathieu Mansuy - Professeur en MP2I au Lycée Carnot (Dijon)
Page personnelle : `mathieu-mansuy.fr/`
E-mail : `mathieu.mansuy@ac-dijon.fr`

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition.

Une *suite réelle* est une application $u : n \mapsto u(n)$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(n)$ est généralement noté u_n et est appelé *n-ème terme*, ou *terme d'indice n*, de la suite u. De même, la suite u est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou (u_n) plus simplement.

L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Mise en garde.

On prendra garde à bien distinguer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui est un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, avec son n-ème terme u_n, qui est un réel.

Remarque. Il est aussi possible considérer des suites définies à partir d'un certain rang n_0, c'est-à-dire dont l'ensemble de départ est $\mathbb{N} \setminus [\![0, n_0 - 1]\!]$. Dans ce cas on note la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ pour bien marquer le fait qu'elle n'est pas définie sur $\mathbb{N}$ tout entier.

Modes de définition d'une suite. Une suite (u_n) peut être définie de trois manières différentes :

- par une *formule explicite* : chaque terme de la suite est donné directement en fonction de n, soit $u_n = f(n)$. Par exemple,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{n^2+1}.$$
- par une *formule de récurrence* : u_n est exprimé en fonction de n et des termes précédents $u_{n-1}, \dots, u_0$. Par exemple,
$$u_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \qquad \text{(relation de récurrence d'ordre 1).}$$
$$u_0 = 0,\ u_1 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \qquad \text{(relation de récurrence d'ordre 2).}$$
- par une *formule implicite* : le terme général u_n de la suite est solution d'une équation dépendant de n. Par exemple,
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ est l'unique solution de l'équation } x^3 + x - 1 = n.$$

1.2 Suites monotones

Définition.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- *croissante* (resp. *strictement croissante*) si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_n < u_{n+1}$).
- *décroissante* (resp. *strictement décroissante*) si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_{n+1}$ (resp. $u_n > u_{n+1}$).
- *monotone* (resp. *strictement monotone*) si elle est croissante (resp. strictement croissante) ou décroissante (resp. strictement décroissante).
- *constante* si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n$.

Méthode. Comment montrer qu'une suite est monotone ?

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, on pourra selon les cas :

- *étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$;*
- *si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **à valeurs strictement positives**, comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1. Cette méthode est intéressante lorsque le terme général u_n de la suite est défini par des produits et des quotients et qu'on peut espérer des simplifications.*

Exercice 1 Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dbinom{2n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition.

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite, et pour tout $n \geq n_0$, soit $\mathscr{P}(n)$ une propriété faisant intervenir la suite (u_n). On dit qu'une suite (u_n) satisfait la propriété $\mathscr{P}(n)$ *à partir d'un certain rang* s'il existe $N \geq n_0$ tel que pour tout $n \geq N$, $\mathscr{P}(n)$ soit vraie.

Définition.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Elle est dite *stationnaire* si elle est constante à partir d'un certain rang, c'est-à-dire :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n = u_N.$$

Exemple. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \prod_{k=0}^{n}(100-k)$. Alors (u_n) est stationnaire, constante égale à 0 à partir du rang $N = 100$.

1.3 Suites majorées, minorées, bornées

Définition.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- *majorée* si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
  Un tel réel M, s'il existe, est alors appelé un *majorant de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- *minorée* si : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$.
  Un tel réel m, s'il existe, est alors appelé un *minorant de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- *bornée* lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

Propriété 1 (✎)

Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, c'est-à-dire si, et seulement si, il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.

Danger.

Un majorant/minorant est une **constante**, et ne dépend donc pas de n. Par exemple, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| n^2 \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \right| \leq n^2.$$

Mais on ne peut en aucun cas conclure de cette inégalité que la suite de terme général $u_n = n^2 \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$ est bornée. En revanche, en se souvenant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| n^2 \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \right| \leq n^2 \times \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n} \leq 1.$$

Et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien bornée.

2 Limite d'une suite réelle

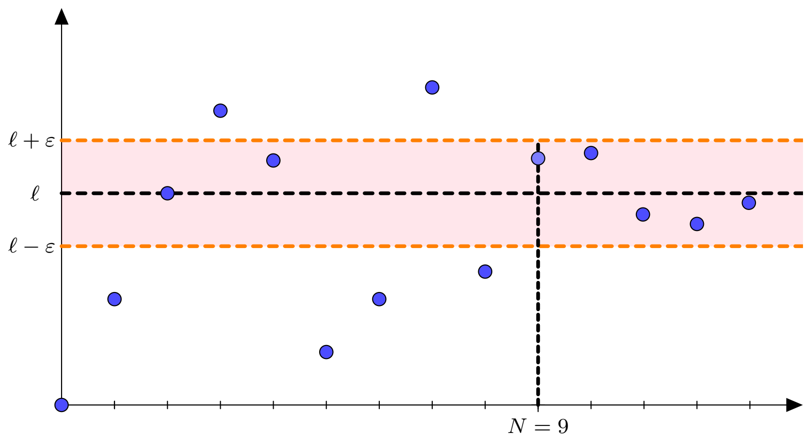
2.1 Suites convergentes

Définition.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, et soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ, ou que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet* ℓ *pour limite*, si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \ \Rightarrow\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.



Convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ : pour tout $n \geq N$, u_n est dans la « bande » $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$.

Remarques.

- Il n'y a pas unicité du rang N : dans le cas de la suite dessinée ci-dessus, $N = 10$ convient également, et plus généralement, tout $N \geq 9$ convient.
- La valeur de N **dépend** de ε : si ε diminue, il faudra sans doute augmenter la valeur de N.
- On peut prendre dans la définition $|u_n - \ell| < \varepsilon$ ou $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$, cela conduit à la même notion de convergence. En effet, le fait que les inégalités larges impliquent les inégalités strictes est évident.

  Et inversement, supposons que : $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

  Prenons alors $\varepsilon > 0$. En appliquant la définition précédente à $\frac{\varepsilon}{2}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Et donc : $\quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \ \Rightarrow\ |u_n - \ell| < \varepsilon$.

Le saviez-vous ?

La notion de limite est restée très intuitive durant de nombreux siècles. On en trouve les premières traces dans les arguments du philosophe Zénon d'Élée ($5^{\text{ème}}$ siècle avant J.-C.). Il fallut cependant attendre la fin du $18^{\text{ème}}$ pour qu'une première tentative de définition soit proposée par l'encyclopédiste Jean D'Alembert (1717 - 1783), mais elle était fort imprécise. Au début du $19^{\text{ème}}$ siècle, Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857), dans son *Cours d'Analyse de l'École royale polytechnique*, en donne une définition satisfaisante. Cependant, il manquait à tous ces savants une construction précise de l'ensemble des nombres réels. Ceci fut l'œuvre, entre autres, de Karl Weierstrass (1815 - 1897), ce qui lui permit d'introduire la définition précédente, que nous utilisons de nos jours.

Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857).

Exercice 2 On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ et $v_n = q^n$ avec $q \in]-1,1[$. Montrer que ces deux suites convergent vers 0.

Propriété 2 (Indifférence par changement des premiers termes - ✎)

Si deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont égales à partir d'un certain rang, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ si, et seulement si, $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$

Remarque. On peut donc changer un nombre fini de termes d'une suite sans en changer la limite éventuelle. La conséquence est que la plupart des théorèmes qui vont suivre restent vrais si leurs hypothèses sont satisfaites à partir d'un certain rang seulement.

Définition.

On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *convergente*, ou qu'elle *converge*, s'il existe un réel ℓ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Dans le cas contraire, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge*, ou qu'elle est *divergente*.

Exercice 3 Montrer que la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

Propriété 3 (Unicité de la limite - ✎)

Si la suite (u_n) converge, alors sa limite est unique. On la note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Danger.

Il est hors de question d'utiliser la notation $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ avant d'avoir prouvé la convergence de la suite !

2.2 Limites infinies

Définition.

- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$, ou que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge vers* $+\infty$, et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies u_n \geq A.$$

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $-\infty$, ou que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge vers* $-\infty$, et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies u_n \leq A.$$

Remarque. La définition de $u_n \to +\infty$ se traduit par : quelque soit le réel A qu'on se fixe, la suite (u_n) a tous ses termes plus grands que A à partir d'un certain rang.

Exercice 4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n^2)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge $+\infty$.

2.3 Propriétés des suites convergentes

Propriété 4 (✎)

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|\ell|$.

Propriété 5 (✎)

Toute suite réelle convergente est bornée.

Mise en garde.

La réciproque est fausse : la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée mais ne converge pas.

Propriété 6 (✎)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, et $\ell \in \mathbb{R}$.

(1) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si, et seulement si, $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

(2) Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive qui converge vers 0, et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leq \alpha_n.$$

Alors, la suite (u_n) est convergente, et converge vers ℓ.

Méthode. Convergence par majoration.
Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, on peut tenter de majorer $|u_n-\ell|$ par une suite qui converge vers 0.

Exercice 5 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin\left(\frac{u_n}{2}\right)$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Propriété 7 (✎)

Si (u_n) tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $\ell > 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par un réel strictement positif à partir d'un certain rang.

Mise en garde.
Si (u_n) n'est pas majorée, on n'a pas nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$: par exemple, la suite définie par $u_n = (-1)^n n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ n'est pas majorée, et ne diverge pas vers $+\infty$.

Corollaire 8

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.

2.4 Opérations sur les limites

Propriété 9 (✎)

(1) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergeant vers 0. Alors $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

(2) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers 0 et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Alors $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

Propriété 10 (Opérations sur les limites finies - ✎)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ'.

(1) Pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda\ell + \mu\ell'$.

(2) $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\ell'$.

Propriété 11 (Limites infinies - ✎)

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $+\infty$.

(1) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite minorée, alors $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

(2) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite minorée par un réel strictement positif à partir d'un certain rang, alors $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

On déduit des propositions précédentes les opérations sur les limites résumées dans les deux tableaux suivants.

Limite de $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

Limite de $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) =$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

Propriété 12 (Limite d'un quotient - ✎)

(1) Si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et (v_n) converge vers $\ell' \in \mathbb{R}^*$, $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers $\dfrac{\ell}{\ell'}$.

(2) Si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, alors $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers 0.

(3) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et est strictement positif (resp. strictement négatif) à partir d'un certain rang, alors $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie à partir d'un certain rang et diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

2.5 Passage à la limite dans les inégalités

Propriété 13 (Passage à la limite dans les inégalités larges - ✎)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites qui convergent vers ℓ et ℓ' respectivement, et soient $m, M \in \mathbb{R}$.

(1) Si $u_n \leq M$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \leq M$.

(2) Si $u_n \geq m$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \geq m$.

(3) Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \leq \ell'$.

Danger.

- Ce résultat suppose que l'on sait déjà que **tout converge**, et ce préalable est indispensable avant de passer à la limite dans les inégalités.

  Par exemple, bien que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, il n'est pas question d'écrire qu'alors $-1 \leq \lim\limits_{n \to +\infty} (-1)^n \leq 1$. En effet, $\lim\limits_{n \to +\infty} (-1)^n$ ne veut rien dire !

- Il n'existe pas de résultat analogue avec des inégalités strictes : si $u_n < v_n$, la seule chose que l'on puisse affirmer (sous réserve de convergence), c'est que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leq \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

  Par exemple, $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais pourtant $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n}$.

  On retiendra donc que les inégalités strictes deviennent larges en passant à la limite.

3 Théorèmes d'existence d'une limite

3.1 Théorèmes d'encadrement

Théorème 14 (Théorème des gendarmes (ou d'encadrement) - ✎)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites vérifiant :

- $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang ;
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$.

Exercice 6 Étudier la convergence des suites :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$;
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n+1}$, où $x \in \mathbb{R}$.

Propriété 15 (✎)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

(1) Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

(2) Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Exercice 7 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Étudier la limite de (H_n).

3.2 Théorème de la limite monotone

Théorème 16 (Théorème de la limite monotone - ✎)

(1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante. Alors :

- si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, elle converge, et sa limite est $\sup\{u_n,\ n\in\mathbb{N}\}$;
- si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, elle diverge vers $+\infty$.

(2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante. Alors :

- si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, elle converge, et sa limite est $\inf\{u_n,\ n\in\mathbb{N}\}$;
- si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée, elle diverge vers $-\infty$.

Exercice 8 Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que la suite (u_n) converge.

3.3 Suites adjacentes

Définition.

Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes si :

- l'une est croissante ;
- l'autre est décroissante ;
- $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Théorème 17 (Théorème des suites adjacentes - ✎)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes, avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante. Alors :

(1) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ ;

(2) $\forall m, n \in \mathbb{N},\ u_m \leq \ell \leq v_n$.

Propriété 18 (Convergence des suites des approximations décimales d'un réel - ✎)

Soient $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $v_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$.
Alors les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des approximations décimales par défaut et par excès de x sont adjacentes, et elles convergent toutes les deux vers x.

Exercice 9 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

   On admet que la limite commune de ces deux suites est e.

2. En déduire que e est irrationnel.

4 Suites extraites

Définition.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On appelle *suite extraite*, ou *sous-suite*, de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante (appelée parfois *application d'extraction*).

On appelle *valeur d'adhérence de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute limite finie d'une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemples.

- $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appelées *suites extraites paire et impaire*.
- Notons $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors 1 et -1 sont des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puisque $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$.

Remarques.

- Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\varphi(n) = \underbrace{\varphi(0)}_{\geq 0} + \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{(\varphi(k+1) - \varphi(k))}_{\geq 1} \geq 0 + \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$

- La suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est jamais que la composée $u \circ \varphi$. Si on en extrait une nouvelle suite à partir d'une application $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, le résultat est $u \circ \varphi \circ \psi = (u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où l'on a composé **à droite** par l'application ψ.

Propriété 19 (✎)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers la même limite ℓ.

  En particulier, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite est sa seule valeur d'adhérence.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Méthode. Comment montrer qu'une suite n'a pas de limite ?

Pour montrer qu'une suite n'a pas de limite, on se sert souvent de la contraposée de ce théorème : si on trouve deux suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui ne convergent pas vers la même limite, alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*

Exemple. La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite car $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^{2n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^{2n+1} = -1$.

Exercice 10 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{n}{9} - \left\lfloor \dfrac{\sqrt{n}}{3} \right\rfloor^2$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet-elle une limite ?

Théorème 20 (de Bolzano-Weierstrass - ✎)

De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.
Autrement dit, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée, alors il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5 Caractérisations séquentielles

Propriété 21 (Caractérisation séquentielle de la borne supérieure - ✎)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- Si A est majorée, soit $M \in \mathbb{R}$. Alors $M = \sup(A)$ si, et seulement si, M est un majorant de A et il existe une suite à valeurs dans A qui converge vers M.
- A n'est pas majorée si, et seulement si, il existe une suite d'éléments de A qui tend vers $+\infty$.

Ces résultats s'étendent sans difficulté aux bornes inférieures.

Propriété 22 (Caractérisation séquentielle de la borne inférieure - ✎)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- Si A est minorée, soit $m \in \mathbb{R}$. Alors $m = \inf(A)$ si, et seulement si, m est un minorant de A et il existe une suite à valeurs dans A qui converge vers m.
- A n'est pas minorée si, et seulement si, il existe une suite d'éléments de A qui tend vers $-\infty$.

Exercice 11 Déterminer, si elles existent, les bornes supérieure et inférieure de $A = \left\{ \dfrac{2}{n} + (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Propriété 23 (Caractérisation séquentielle de la densité - ✎)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Alors A est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.

6 Extension aux suites complexes

Définition.

Une *suite complexe* est une application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$.

Remarques.

- Se donner une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ revient à se donner deux suites réelles $(\mathrm{Re}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$.
- On peut étendre aux suites complexes toutes les propriétés des suites réelles qui ne font pas référence à la notion d'ordre sur $\mathbb{R}$: les notions de suites croissantes, décroissantes, majorées, minorées, ... ne pourront plus être utilisées pour les suites complexes.

  Les propriétés faisant intervenir la valeur absolue seront étendues en la remplaçant pas le module.

Définition.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *bornée* s'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\ell \in \mathbb{C}$, et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Remarque. Pour les suites complexes, on ne parlera pas de limite infinie, puisqu'il s'agit d'une notion dont la définition fait appel à la relation d'ordre, spécifique à $\mathbb{R}$.

Propriété 24 (✎)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, les suites réelles $(\mathrm{Re}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ le sont.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, les suites réelles $(\mathrm{Re}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, et dans ce cas :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(u_n) + i \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(u_n).$$

Corollaire 25 (✎)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, $(\overline{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\overline{\ell}$.

Propriété 26 (✎)

Toute suite complexe convergente est bornée.

Théorème 27 (de Bolzano-Weierstrass - ✎)

De toute suite complexe bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Remarque. Résumons par un tableau ce qui reste valable ou non pour les suites à valeurs complexes.

Ce qui reste valable dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$	**Ce qui n'est plus valable dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$**
Unicité de la limite	Majorant/minorant
Une suite convergente est bornée	Monotonie
Opérations sur les limites	Inverse d'une suite de limite nulle
Suites extraites	Limites infinies
Théorème de Bolzano-Weierstrass	Passage à la limite dans les $\leq$
$(u_n \times v_n)$ avec (u_n) bornée et $v_n \to 0$	Théorème des gendarmes
	Théorème de la limite monotone
	Suites adjacentes

7 Suites particulières

On considère dans cette partie des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ étant égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

7.1 Suites arithmétiques et géométriques

Définition.

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- Soit $r \in \mathbb{K}$. La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite *arithmétique de raison* r si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n + r$.
- Soit $q \in \mathbb{K}$. La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite *géométrique de raison* q si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} = qu_n$.

Propriété 28 (Expression explicite)

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est arithmétique de raison $r \in \mathbb{K}$, alors pour tout $n \geq n_0$, $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$.
- Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est géométrique de raison $q \in \mathbb{K}$, alors pour tout $n \geq n_0$, $u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$.

Propriété 29 (Limite d'une suite géométrique - ✎)

Soit $q \in \mathbb{K}$. Alors :

- Si $|q| > 1$, alors (q^n) diverge.
- Si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $|q| = 1$, alors (q^n) diverge si $q \neq 1$, converge vers 1 si $q = 1$.

7.2 Suites arithmético-géométriques

Définition.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *arithmético-géométrique* lorsqu'il existe $(a,b)\in\mathbb{K}^2$ tel que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=au_n+b. \tag{1}$$

Méthode. Comment obtenir l'expression d'une suite arithmético-géométrique ?

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique vérifiant pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=au_n+b$ avec $a\neq 1$. Pour obtenir l'expression explicite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on procèdera comme suit :

(i) on détermine le point fixe, c'est-à-dire $\alpha\in\mathbb{K}$ tel que :

$$\alpha=a\alpha+b. \tag{2}$$

(ii) En faisant (1) – (2), on obtient :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad (u_{n+1}-\alpha)=a(u_n-\alpha).$$

On pose alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=u_n-\alpha$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a.

(iii) On donne l'expression explicite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on en déduit celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 12 On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}=-u_n+4. \qquad (1)$$

Déterminer l'expression explicite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Rédaction.

On gardera les mêmes réflexes de rédaction que pour les équations différentielles : on commencera toujours par bien identifier le « type » de suite auquel on a affaire, et donc le résultat de cours qu'il faudra utiliser.

7.3 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition.

On appelle *suite récurrente linéaire d'ordre 2* toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle qu'il existe $(a,b)\in\mathbb{K}^2$, avec $b\neq 0$, tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}+au_{n+1}+bu_n=0.$$

Dans ce cas, l'équation $r^2+ar+b=0$ est appelée *équation caractéristique* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque. Le cas $b=0$ correspond à celui des suites arithmético-géométriques, que nous savons déjà traiter.

Propriété 30 (Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ - ✎)

Soient $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 satisfaisant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$.

- Si l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes r_1 et r_2, alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$
- Si l'équation caractéristique admet une solution double r, alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + \mu n)r^n.$$

Propriété 31 (Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ - ✎)

Soient $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 satisfaisant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$.

- Si l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$
- Si l'équation caractéristique admet une solution double r, alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + \mu n)r^n.$$
- Si l'équation caractéristique admet deux racines complexes (non réelles) conjuguées $r_1 = re^{i\theta}$ et $r_2 = re^{-i\theta}$ (avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$), alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = r^n \left(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)\right).$$

Exercice 13 Déterminer l'expression explicite des suites suivantes :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$;
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 2$, $v_1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = 2v_{n+1} - 2v_n$.