Chapitre 13

Nombres réels

Compétences attendues.

- ✓ Connaitre les caractérisations de la borne supérieure ou de la borne inférieure et savoir les déterminer en pratique.
- ✓ Approximer un réel par un rationnel ou un irrationnel, et exploiter la densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Mathieu Mansuy - Professeur en MP2I au Lycée Carnot (Dijon)
Page personnelle : `mathieu-mansuy.fr/`
E-mail : `mathieu.mansuy@ac-dijon.fr`

1 Ensembles de nombres

Le but de ce chapitre est d'évoquer rapidement les définitions des différents ensembles de nombres classiques : entiers naturels, entiers relatifs, nombres rationnels, pour parvenir finalement aux nombres réels, dont nous étudierons un peu plus longuement les propriétés.

Le but n'est pas de faire une construction rigoureuse et exhaustive qui est complètement hors-programme, mais de donner un aperçu des techniques utilisées en vue de mieux comprendre l'origine des propriétés les plus importantes de ces nombres.

1.1 Entiers naturels, entiers relatifs

L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels se définit à partir des axiomes introduits en 1889 par le mathématicien italien Giuseppe Peano (1858-1932). Partant d'un objet initial 0 et de la relation de successeur, on définit alors tous les entiers naturels par induction structurelle : l'entier n étant construit, on définit un nouvel objet $n+1$ appelé le successeur de n. Ainsi, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. On définit alors sur $\mathbb{N}$ une addition $+$ et une multiplication $\times$, ainsi qu'une relation d'ordre totale $\leq$, qui ont toutes les bonnes propriétés que vous connaissez.

Partant des entiers naturels, il est assez facile de construire l'ensemble des entiers relatifs. Pour cela, on définit sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ par :

$$\forall (n,p), (n',p') \in \mathbb{N}^2, \quad (n,p) \mathscr{R} (n',p') \;\Leftrightarrow\; n + p' = n' + p.$$

L'ensemble quotient, constitué des classes d'équivalences pour la relation $\mathscr{R}$, est noté $\mathbb{Z}$, et ses éléments sont appelés les entiers relatifs. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note :

$$+m = \mathrm{cl}((m,0)) = \{(m,0), (m+1,1), (m+2,2), \dots\}$$

et

$$-m = \mathrm{cl}((0,m)) = \{(0,m), (1,m+1), (2,m+2), \dots\}.$$

Ainsi, $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, et $\mathbb{N}$ s'identifie à un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$. On vérifie que les opérations $+$ et $\times$ définies sur $\mathbb{N}$ se prolongent à $\mathbb{Z}$, de même que la relation d'ordre totale $\leq$.

1.2 Nombres rationnels, nombres décimaux

Un nombre rationnel n'est rien d'autre qu'un couple d'entiers relatifs : un numérateur et un dénominateur (forcément non nul). Il y a cependant quelques précautions à prendre, puisque deux couples d'entiers peuvent représenter la même fraction, par exemple : $\frac{4}{11} = \frac{8}{22} = \frac{12}{33}$.

Ayant cela en tête, on peut construire plus formellement l'ensemble $\mathbb{Q}$ comme l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ muni de la relation d'équivalence $\equiv$ définie par :

$$\forall (p,q), (p',q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \quad (p,q) \equiv (p',q') \;\Leftrightarrow\; pq' - p'q = 0.$$

En d'autres termes, $\mathbb{Q}$ est l'ensemble quotient de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ par la relation $\equiv$. Pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, on note :

$$\frac{p}{q} = \mathrm{cl}((p,q)) = \{(p,q), (2p,2q), \dots\}.$$

Ainsi, $\mathbb{Q} = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-17}{72}, \dots\}$. Rappelons au passage que nous avons démontré qu'un rationnel admet un unique représentant irréductible $\frac{a}{b}$ avec $a \wedge b = 1$. L'entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ peut alors être identifié au rationnel $\frac{n}{1}$, ce qui permet de considérer que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. On vérifie là encore que les opérations $+$ et $\times$ définies sur $\mathbb{Z}$ se prolongent à $\mathbb{Q}$, de même que la relation d'ordre totale $\leq$, avec toutes les bonnes propriétés qu'on leur connait.

On définit enfin l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux comme le sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ formé des rationnels de la forme $\frac{p}{10^n}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. On vérifie aisément qu'il est stable par somme et par produit.

À la suite de cette construction, nous disposons des ensembles et des inclusions (strictes) suivantes : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

1.3 Insuffisances de $\mathbb{Q}$

Jusqu'à la construction de $\mathbb{Q}$, tout va bien. Pourquoi vouloir alors faire plus ? Pourquoi ne pas travailler uniquement en manipulant des rationnels ? Parce que l'ensemble des rationnels souffre d'un certain nombre d'insuffisances.

- Il existe des nombres rationnels positifs n'ayant pas de racine carrée (ou plus généralement de racine n-ème avec $n \geq 2$) dans $\mathbb{Q}$.

  Par exemple, $\sqrt{2}$ n'appartient pas à $\mathbb{Q}$. Or, il s'agit de la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1. Rester dans les rationnels, c'est donc s'interdire de mesurer la diagonale de ce carré (mais aussi le périmètre du cercle trigonométrique).

- Il existe des suites croissantes et majorées ou décroissantes et minorées de $\mathbb{Q}$ n'ayant pas de limite dans $\mathbb{Q}$ (et donc divergentes dans $\mathbb{Q}$).

  Par exemple, la suite (u_n) de rationnels définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$ est (strictement) décroissante et minorée, mais diverge dans $\mathbb{Q}$ (elle converge vers $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

- Il existe des parties non vides et majorées ou non vides et minorées de $\mathbb{Q}$ n'ayant pas de borne supérieure ou de borne inférieure dans $\mathbb{Q}$.

  Par exemple, la partie $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0 \text{ ou } x^2 \leq 2\}$ ne possède pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$: on vérifie que si $b \in \mathbb{Q}$ est un majorant de A, alors $c = \dfrac{1}{2}\left(b + \dfrac{2}{b}\right) \in \mathbb{Q}$ est un majorant de A strictement plus petit que b.

1.4 Nombres réels

L'exemple de la partie $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0 \text{ ou } x^2 \leq 2\}$ témoigne de l'existence de sous-ensembles « sans bord » dans $\mathbb{Q}$, et de la présence de « trous » dans l'ensemble des rationnels. L'idée pour la construction de $\mathbb{R}$ est alors de « boucher les trous » laissés par les éléments de $\mathbb{Q}$, un peu comme on coulerait du mortier pour sceller un ensemble de petites pierres. Il existe deux manières classiques de procéder, d'esprits très différents. L'une d'entre elles fut proposée par le mathématicien allemand Richard Dedekind (1831 - 1916) en 1872 et utilise ce qu'on appelle aujourd'hui les coupures de Dedekind.

Sans rentrer dans les détails, l'idée principale est qu'un nombre réel x « coupe en deux » l'ensemble des rationnels : il y a ceux qui sont plus petits que x et ceux qui sont plus grands que x. Un nombre réel est alors une partition de $\mathbb{Q}$ en deux ensembles A et B tels que tout élément de A soit plus petit que tout élément de B. Par exemple, on définit le réel $\sqrt{2}$ comme étant la partition (A, B) où $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0 \text{ ou } x^2 \leq 2\}$ et $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ et } x^2 > 2\}$.

Une fois les réels ainsi définis, on vérifie que $\mathbb{Q}$ s'identifie à un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, et que les opérations $+$ et $\times$ ainsi que la relation d'ordre $\leq$ se prolongent à $\mathbb{R}$ avec les bonnes propriétés qu'on leur connait.

2 La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

2.1 Bornes supérieures et bornes inférieures dans $\mathbb{R}$

On considère $\mathbb{R}$ muni de sa relation d'ordre usuelle $\leq$. Nous admettrons la propriété fondamentale suivante.

Théorème 1 (Propriété de la borne supérieure)

Toute partie **non vide** et **majorée** de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

Le saviez-vous ?

La propriété de la borne supérieure a été énoncée (et démontrée, mais avec une erreur due à une absence de définition correcte de $\mathbb{R}$) en 1817 par le mathématicien tchèque Bernhard Bolzano (1781 - 1848), en vue de donner une démonstration rigoureuse du théorème des valeurs intermédiaires (aussi appelé théorème de Bolzano), jusque-là démontré par un dessin (Cauchy, auteur de ce théorème se contente d'un dessin comme preuve).

Corollaire 2 (✎)

Toute partie **non vide** et **minorée** de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

Danger.

Ne pas confondre plus grand élément et borne supérieure : une partie A peut posséder une borne supérieure sans avoir de plus grand élément. En revanche, nous avons vu que si A possède un plus grand élément a, alors $a = \sup(A)$.

Exercice 1 Compléter :

	$\min(A)$	$\inf(A)$	$\max(A)$	$\sup(A)$
$A = \{1\}$				
$A = \{2, 4\}$				
$A =]1, 5[$				
$A = [-5, 0[$				
$A = \{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\}$				
$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$				
$A = [2, 4[\cap \mathbb{Q}$				

Théorème 3 (Caractérisation de la borne supérieure)

Soient A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, et M un réel.

$$\begin{aligned} M = \sup(A) &\Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \text{pour tout majorant } M' \text{ de } A,\ M \leq M' \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \text{pour tout réel } b < M,\ b \text{ n'est pas un majorant de } A \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A,\ \ x \leq M \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ M - \varepsilon < x \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 2 Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On note $A+B = \{a+b,\ (a,b) \in A\times B\}$. Montrer que $A + B$ admet une borne supérieure, et que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Théorème 4 (Caractérisation de la borne inférieure)

Soient B une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, et m un réel.

$$\begin{aligned} m = \inf(B) &\Leftrightarrow \begin{cases} m \text{ est un minorant de } B \\ \text{pour tout minorant } m' \text{ de } B,\ m' \leq m \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \text{ est un minorant de } B \\ \text{pour tout réel } a > m,\ a \text{ n'est pas un minorant de } B \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in B,\ \ x \geq m \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in B,\ x < m + \varepsilon \end{cases} \end{aligned}$$

2.2 Propriété d'Archimède

Propriété 5 (✎)

L'ensemble $\mathbb{R}$ est *archimédien*, ce qui signifie que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall y \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ nx \geq y.$$

Corollaire 6 (✎)

Soit $x > 1$. Alors : $\quad \forall y \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ x^n \geq y.$

Nous sommes désormais en mesure de justifier la définition de la partie entière, dont nous avions admis précédemment qu'elle était bien définie.

Propriété 7 (✎)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors il existe un unique entier relatif n tel que $n \leq x < n+1$. On le note $n = \lfloor x \rfloor$, et on l'appelle la *partie entière de x*.

2.3 Intervalles de $\mathbb{R}$

Rappel. On appelle *intervalle de* $\mathbb{R}$ toute partie I de $\mathbb{R}$ de l'une des formes suivantes :

		I majoré, $b = \sup(I)$		I non majoré
		$b \in I$	$b \notin I$	
I minoré $a = \inf(I)$	$a \in I$	$[a, b]$	$[a, b[$	$[a, +\infty[$
	$a \notin I$	$]a, b]$	$]a, b[$	$]a, +\infty[$
I non minoré		$]-\infty, b]$	$]-\infty, b[$	$\mathbb{R}$

Propriété 8 (Caractérisation des intervalles -)

Soit I une partie de $\mathbb{R}$. Alors I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si, et seulement si, I est une *partie convexe* de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire telle que :

$$\forall (x, y) \in I^2,\ [x, y] \subset I.$$

3 Approximations d'un réel

3.1 Approximations décimales

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Posons $u_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$. Par définition de la partie entière :

$$\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1, \quad \text{d'où} \quad u_n \leq x < u_n + \frac{1}{10^n}.$$

Définition.

On appelle *approximation décimale de x par défaut* (resp. *par excès*) *à 10^{-n} près* le nombre décimal $u_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ (resp. $v_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} + 1$).

Exemple. Pour $x = \pi$, on a $u_0 = 3$ et $v_0 = 4$, $u_1 = 3.1$ et $v_1 = 3.2$, $u_2 = 3.14$ et $v_2 = 3.15$.

3.2 Parties denses

Propriété 9 ( )

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Alors il y a équivalence entre :

(i) tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient un élément de A ;

(ii) entre deux réels distincts, il y a un élément de A :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x < y) \ \Rightarrow\ (\exists a \in A,\ x \leq a \leq y).$$

Une partie A de $\mathbb{R}$ qui a ces propriétés est dite *dense dans* $\mathbb{R}$.

Exercice 3 Montrer que l'ensemble $\mathbb{D}$ des décimaux est dense dans $\mathbb{R}$.

Propriété 10 (Densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ - ✎)

- L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dense dans $\mathbb{R}$.
- L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des nombres irrationnels est dense dans $\mathbb{R}$.

4 Droite numérique achevée

Donnons-nous deux objets mathématiques quelconques extérieurs à $\mathbb{R}$ et notons-les $+\infty$ et $-\infty$. On étend alors les règles de calcul sur $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Définition.

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, appelée *droite numérique achevée*. On étend à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation d'ordre $\leq$, l'addition $+$ et la multiplication $\times$ de $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

- *Prolongement de l'ordre :* pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x < +\infty$.
- *Prolongement de l'addition :* pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty \quad \text{et} \quad x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$$

  et $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.
- *Prolongement de la multiplication :* pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = \begin{cases} +\infty & \text{si } x > 0 \\ -\infty & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad x \times (-\infty) = (-\infty) \times x = \begin{cases} \infty & \text{si } x > 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

  et $\dfrac{1}{+\infty} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$.

Mise en garde.

Notons que tout ceci et en accord avec les règles bien connues (et bientôt prouvées) sur les sommes et produits de limites. Aussi, nous ne donnerons pas de valeur aux opérations suivantes qui sont des formes indéterminées :

$$(+\infty) - (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty), \quad 0 \times (\pm\infty), \quad (\pm\infty) \times 0, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

Pour aller plus loin.

Dans ce nouvel ensemble totalement ordonné $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$, la propriété de la borne supérieure prend une forme simplifiée :

> Toute partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.

En effet, si $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ est non vide, distinguons trois cas cas :

- Si $A = \{-\infty\}$, alors $-\infty$ est l'unique majorant de A, et donc $\sup(A) = -\infty$.
- Si $+\infty \in A$, alors $+\infty$ est le seul majorant de A, donc égal à $\sup(A)$.
- Si $+\infty \notin A$ et $A \neq \{-\infty\}$, alors $A \cap \mathbb{R}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$.
  - Soit elle est majorée, et donc possède une borne supérieure (pour la relation d'ordre de $\mathbb{R}$) $m \in \mathbb{R}$, qui est donc aussi le plus petit des majorants dans $\overline{\mathbb{R}}$ de A. Donc m est la borne supérieure de A pour la relation d'ordre sur $\overline{\mathbb{R}}$.
  - Soit elle n'est pas majorée dans $\mathbb{R}$, auquel cas $+\infty$ est le seul majorant (dans $\overline{\mathbb{R}}$) de A, et donc c'est la borne supérieure de A dans $\overline{\mathbb{R}}$.