Chapitre 10

Applications, relations binaires

Compétences attendues.

- ✓ Déterminer et manipuler les images directes et réciproques d'ensembles par une application.
- ✓ Montrer qu'une application est injective, surjective ou bijective.
- ✓ Déterminer, si elle existe, la bijection réciproque d'une application.
- ✓ Montrer qu'une relation binaire est une relation d'équivalence ou une relation d'ordre.
- ✓ Montrer qu'une partie d'un ensemble ordonné est majorée, minorée, et déterminer s'ils existent le minimum, le maximum, la borne supérieure ou la borne inférieure de cette partie.

Mathieu Mansuy - Professeur en MP2I au Lycée Carnot (Dijon)
Page personnelle : `mathieu-mansuy.fr/`
E-mail : `mathieu.mansuy@ac-dijon.fr`

1 Retour sur la notion d'applications

1.1 Rappels

Définition.

Soient E et F deux ensembles. On dit que f est une *application de E dans F* lorsqu'à tout élément x de E, f associe un unique élément de F noté $f(x)$. E est l'*ensemble de départ* de f et F est l'*ensemble d'arrivée* de f. L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathscr{F}(E,F)$ ou F^E.

Définition.

Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$, et soient $x \in E$ et $y \in F$.
Si $y = f(x)$, on dit que y est **l'***image de x par f*, et que x est **un** *antécédent de y par f*.
On appelle *image de f* l'ensemble :

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x),\ x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E,\ y = f(x)\}.$$

Notons que c'est une partie de F, et qu'elle est formée des éléments de F qui possèdent au moins un antécédent par f.

Danger.

L'image d'un élément de l'ensemble de départ est toujours unique, par définition d'une application. En revanche, un élément de l'ensemble d'arrivée peut ne pas posséder d'antécédents, ou en posséder plusieurs. On prendra donc bien garde à dire **un** antécédent de y, et surtout pas **l'**antécédent de y par f.

1.2 Image directe, image réciproque

Définition.

Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et soit $A \subset E$. On appelle *image directe de A par f*, et on note $f(A)$, la partie de F définie par :

$$f(A) = \{f(x),\ x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A,\ f(x) = y\}.$$

Remarque. L'image directe de A est donc l'ensemble des éléments de F qui possèdent au moins un antécédent **dans** A. C'est également l'ensemble des images de tous les éléments de A. Notons que par définition, $\mathrm{Im}(f) = f(E)$.

Rédaction.

Quand on souhaite considérer un élément dans $f(A)$, la rédaction n'est surtout pas « soit $f(x) \in f(A)$ », mais :

> Soit $y \in f(A)$. Alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$.

Exemples.

- $\sin([0,\pi]) = [0,1]$, $\arctan([0,+\infty[) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
- On a toujours $f(\emptyset) = \emptyset$, et si $A \neq \emptyset$, alors $f(A) \neq \emptyset$.

Définition.

Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$, et soit $B \subset F$. On appelle *image réciproque de B par f*, et on note $f^{\leftarrow}(B)$, la partie de E définie par :

$$f^{\leftarrow}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Autrement dit, $f^{\leftarrow}(B)$ est la partie de E formée de tous les antécédents des éléments de B par f, et pour tout $x \in E$:

$$x \in f^{\leftarrow}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

Notation.

La notation $f^{\leftarrow}(B)$ est provisoire. Elle a l'avantage de ne souffrir d'aucune ambigüité. Ce n'est cependant pas la notation couramment utilisée que nous introduirons un peu plus tard.

Exemples.

- $\sin^{\leftarrow}(\{-1\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) = -1\} = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$, $\arctan^{\leftarrow}([0,1]) = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.
- Si $f \in \mathscr{F}(E,F)$, et si $y \in F$, alors $f^{\leftarrow}(\{y\})$ est l'ensemble des antécédents de y par f, c'est-à-dire l'ensemble des éléments $x \in E$ solutions de l'équation $y = f(x)$.
- Soit $A \subset E$, et considérons $\mathbb{1}_A : E \to \{0,1\}$ la fonction indicatrice de l'ensemble A, définie pour tout $x \in E$ par :
$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}.$$
Alors $\mathbb{1}_A^{\leftarrow}(\{1\}) = A$ et $\mathbb{1}_A^{\leftarrow}(\{0\}) = \overline{A}$. En particulier la fonction indicatrice d'un ensemble permet de le caractériser : la donnée de $\mathbb{1}_A$ détermine l'ensemble A de manière unique, et réciproquement.
- On peut avoir $f^{\leftarrow}(B) = \emptyset$ sans que B soit vide. Par exemple, $\sin^{\leftarrow}([3,4]) = \emptyset$ puisque les éléments de $[3,4]$ n'ont aucun antécédent par la fonction sin.

Exercice 1 Soient $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $B \subset F$. Montrer que $f^{-1}(B) = \emptyset$ si, et seulement si, $\mathrm{Im}(f) \cap B = \emptyset$.

1.3 Restriction, prolongements

Les notions de restriction et prolongements ont déjà été rencontrés pour les fonctions numériques, elles sont encore valable pour n'importe quelle application.

Définition.

- Soient $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $A \subset E$. On appelle *restriction de f à A* l'application $f_{|A} : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$.
- Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et soit E' un ensemble tel que $E \subset E'$. On appelle *prolongement de f à E'* toute application $g : E' \to F$ telle que $g_{|E} = f$, c'est-à-dire telle que $g(x) = f(x)$ pour tout x dans E.

Mise en garde.

On prendra garde au fait qu'un prolongement de f n'est pas nécessairement unique. Par exemple, $f : x \mapsto \max(0, x)$ et $g : x \mapsto |x|$ sont deux prolongements à $\mathbb{R}$ de la fonction $\mathrm{id}_{[0,+\infty[}$, puisque pour tout $x \geq 0$, $f(x) = g(x) = x$.

Définition.

Soient $f \in \mathscr{F}(E, F)$ et $B \subset F$. On dit que f est à valeurs dans B si $\mathrm{Im}(f) \subset B$, soit encore si :

$$\forall x \in E, \quad f(x) \in B.$$

Exemples. L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2+1} \end{array}$ est à valeurs dans $[1, +\infty[$, $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ \theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{array}$ est à valeurs dans $\mathbb{U}$.

Définition.

Soient $f \in \mathscr{F}(E, E)$ et $A \subset E$. On dit que A *est stable par* f si $f(A) \subset A$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in A, \quad f(x) \in A.$$

Exemple. L'intervalle $[0, 1]$ est stable par sin car $\sin([0, 1]) \subset [0, 1]$.

Définition.

Soient $f \in \mathscr{F}(E, E)$ et A une partie de E stable par f. On appelle *application induite par f sur A* l'application :

$$\tilde{f} : \begin{array}{ccc} A & \to & A \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

Mise en garde.

On distinguera bien la restriction $f_{|A} : A \to E$ de f à A, qui peut être considérée pour toute partie A de E et qui n'a pas de raison d'être à valeurs dans A, et l'application induite $\tilde{f} : A \to A$ de f sur A, qui n'a de sens que si A est stable par f.

2 Injections, surjections, bijections

Si une application f associe à tout élément de E une et une seule image, on s'interroge maintenant sur le nombre éventuel d'antécédents d'un élément y de F.

2.1 Applications injectives

Définition.

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. On dit que f est *injective*, ou encore que f est une *injection*, si tout élément de F admet **au plus** un antécédent par f.

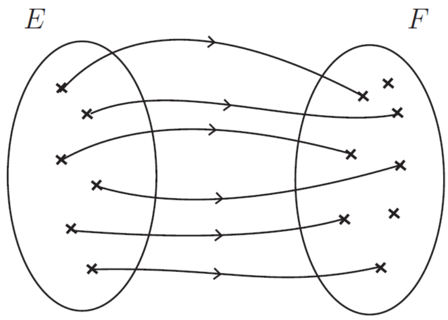
Autrement dit, f est injective si pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ possède au plus une solution $x \in E$.

Exemples.

- Pour tout ensemble E, l'application id_E est injective, puisque tout élément de E admet au plus un antécédent par id_E (il en admet même exactement un, lui-même).

- L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est non injective : en effet, on a par exemple $f(2) = f(-2) = 4$, et 4 admet deux antécédents par f. Par contre, l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est injective.

- L'application représentée ci-dessous est injective :



Théorème 1 (Caractérisation d'une injection -)

Une application $f : E \to F$ est injective si, et seulement si :

$$\forall\,(x_1, x_2) \in E^2, \quad f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2.$$

Remarques.

- Par contraposition, f est injective lorsqu'elle donne des valeurs différentes à des points différents :

$$\forall\,(x_1, x_2) \in E^2, \quad x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2).$$

- Si $f : E \to F$ est injective, et si $x_1, x_2 \in E$, on a en fait l'équivalence :

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Leftrightarrow\; x_1 = x_2$$

  puisque réciproquement, deux éléments de E qui sont égaux ont toujours même image. Ce résultat est particulièrement utile lorsqu'on résout une équation par équivalences.

Méthode. Comment montrer qu'une application est injective ?

Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est injective, on se donne deux éléments quelconques x_1 et x_2 de E tels que $f(x_1) = f(x_2)$ et on montre que $x_1 = x_2$.

Exercice 2 Les applications suivantes sont-elles injectives ?

- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{i\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z}{z-i} \end{array}$;
- $g : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(E) \\ A & \mapsto & \overline{A} \end{array}$;
- $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x+y, xy) \end{array}$.

Propriété 2 (Injectivité et stricte monotonie - ✎)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et soit $f : A \to \mathbb{R}$ une application.
Si f est strictement monotone, alors elle est injective.

Mise en garde.

La réciproque est fausse : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est injective sur $\mathbb{R}^*$, mais n'est pas monotone.

Propriété 3 (✎)

On considère deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

- Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
- Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

2.2 Applications surjectives

Définition.

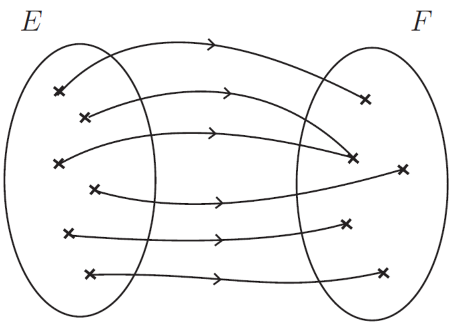
Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. On dit que f est *surjective*, ou que f est une *surjection*, si tout élément de F admet **au moins** un antécédent par f :

$$\forall\, y \in F,\ \exists\, x \in E,\ y = f(x).$$

Autrement dit, f est surjective si pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ possède au moins une solution $x \in E$.

Exemples.

- Pour tout ensemble E, l'application id_E est injective, puisque tout élément de E admet au moins un antécédent par id_E (il en admet même exactement un, lui-même).
- L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est surjective. Par contre, l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas surjective, -1 n'ayant par exemple pas d'antécédent par f.
- L'application représentée ci-dessous est surjective :



Propriété 4 (Caractérisation des surjections - ✎)

Une application $f : E \to F$ est surjective si, et seulement si, $\text{Im}(f) = F$.

Méthode. Comment montrer qu'une application est surjective ?
Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est surjective, on se donne un élément quelconque de F et on montre qu'il a au moins un antécédent dans E.

Exercice 3 Les applications suivantes sont-elles surjectives ?

- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{i\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z}{z-i} \end{array}$;
- $g : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(E) \\ A & \mapsto & \overline{A} \end{array}$;
- $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, xy) \end{array}$.

Propriété 5 (✎)

On considère deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

- Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
- Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

2.3 Bijections

Définition.

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. On dit que f est *bijective* de E dans F, ou que f réalise une *bijection* de E sur F, si tout élément de F admet **un unique** antécédent par f :

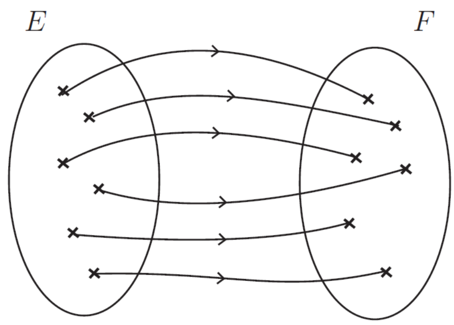
$$\forall y \in F,\ \exists!\, x \in E,\ y = f(x).$$

Autrement dit, f est bijective si pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ possède une unique solution $x \in E$.

Exemples.

- L'application identité id_E d'un ensemble E est bijective : tout élément x de E est son unique antécédent.
- L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas bijective. Elle induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

  Notons bien que le changement des ensembles de départ et d'arrivée d'une application modifie ses propriétés (injectivité, surjectivité, bijectivité).
- Les applications $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (a,b) & \mapsto & a+ib \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi] & \to & \mathbb{C}^* \\ (r,\theta) & \mapsto & re^{i\theta} \end{array}$ sont bijectives.
- L'application représentée ci-dessous est bijective :



Exercice 4 Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$ est bijective.

> **Propriété 6** (Première caractérisation d'une application bijective)
>
> Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. Alors :
>
> $$f \text{ est bijective } \Leftrightarrow f \text{ est injective et surjective.}$$

Exemple. L'application $g : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(E) \\ A & \mapsto & \overline{A} \end{array}$ est injective et surjective. Elle réalise donc une bijection de $\mathscr{P}(E)$ sur lui-même.

Définition.

Soit $f : E \to F$ est une *application bijective*.
On appelle *bijection réciproque* de f, et on note f^{-1}, l'application définie de F dans E par :

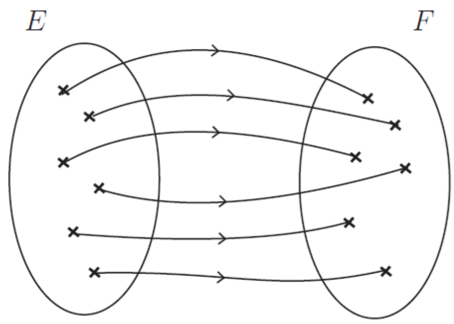
$$f^{-1} : \begin{array}{ccl} F & \to & E \\ y & \mapsto & f^{-1}(y) \text{ l'unique antécédant de } y \text{ par } f \end{array}$$

Autrement dit :

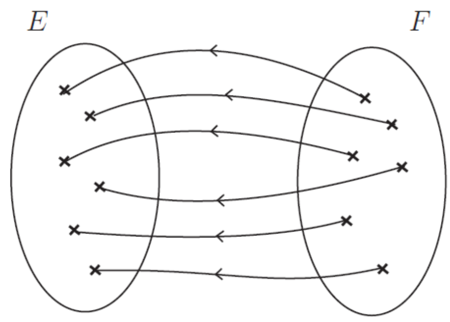
$$\forall\, (x,y) \in E \times F, \quad f^{-1}(y) = x \;\Leftrightarrow\; y = f(x).$$

Exemples.

- La bijection réciproque de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$ est $f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto & \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \end{array}$.
- On représente ci-dessous une application bijective f et sa bijection réciproque f^{-1} :



Représentation de f.



Représentation de f^{-1}.

Remarque. Il résulte de la définition que pour tout $(x, y) \in E \times F$:

$$x = f^{-1} \circ f(x) \quad \text{et} \quad y = f \circ f^{-1}(y).$$

Théorème 7 (Seconde caractérisation d'une application bijective - ✎)

Soit $f : E \to F$ une application.
Alors f est une bijection si, et seulement si, il existe une application $g : F \to E$ telle que :

$$g \circ f = \mathrm{id}_E \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{id}_F.$$

Une telle application g, lorsqu'elle existe, est alors unique : c'est la bijection réciproque de f.

Exemple. L'application $g : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(E) \\ A & \mapsto & \overline{A} \end{array}$ satisfait $g \circ g = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}$. Par conséquent, on retrouve que g est bijective, et de plus $g^{-1} = g$.
Plus généralement, si $f : E \to E$ est une *involution* de E, c'est-à-dire une application satisfaisant $f \circ f = \mathrm{id}_E$, alors f est bijective et $f^{-1} = f$.

Propriété 8 (✎)

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

- Si f est une bijection de E sur F, alors f^{-1} est bijective de F sur E et :
$$(f^{-1})^{-1} = f.$$
- Si f est une bijection de E sur F et si g est une bijection de F sur G, alors $g \circ f$ est une bijection de E sur G et :
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

⚠ **Mise en garde.**
On prendra bien garde au fait que l'ordre change lorsqu'on passe à la bijection réciproque : la bijection réciproque de $g \circ f$ n'est pas $g^{-1} \circ f^{-1}$!
Une analogie simple mais efficace : le matin vous commencez par mettre vos chaussettes (c'est f), puis vous enfilez vos chaussures (c'est g). Le soir, pour vous déshabiller (c'est donc $(g \circ f)^{-1}$), vous commencez par enlever vos chaussures (donc g^{-1}), puis vous enlevez vos chaussettes (c'est f^{-1}). Et sûrement pas le contraire !

Méthode. Comment montrer qu'une application est bijective ?
Le tableau suivant résume la marche à suivre pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est bijective.

Priorité	Ce qu'on fait	Ce qu'on obtient
1	Si on connaît spontanément une expression explicite de f^{-1}, on appelle g la fonction en question et on vérifie que : $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$.	Bijectivité + Réciproque
2	Si on ne connaît pas spontanément f^{-1}, on peut essayer d'en trouver une expression explicite via l'équivalence : $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.	Bijectivité + Réciproque
3	Si on ne se sent pas capable de trouver une expression explicite de f^{-1}, on montre en deux temps que f est à la fois injective et surjective.	Bijectivité

Revenons enfin sur la notion d'image réciproque d'un ensemble par une application $f : E \to F$ dans le cas particulier où f est bijective.

Propriété 9

Soit $f : E \to F$ une application bijective. Pour toute partie B de F :

$$f^{\leftarrow}(B) = f^{-1}(B)$$

où l'on rappelle que $f^{\leftarrow}(B)$ est l'image **réciproque** de B par f, et $f^{-1}(B)$ l'image **directe** de B par f^{-1}.

Notation.

Du fait de ce résultat, nous adopterons désormais la notation usuelle $f^{-1}(B)$ pour l'image réciproque de B par f et plus jamais $f^{\leftarrow}(B)$, que f **soit bijective ou non !**

Danger.

La notation définitive $f^{-1}(B)$ de l'image réciproque de l'ensemble B par f peut être source de confusions : l'application f n'est en général pas bijective, et il n'y a pas nécessairement d'application nommée f^{-1} derrière cette notation.

Mais alors, comment faire pour ne pas se tromper :

- la notation $f^{-1}(B)$ a un sens tout le temps, que f soit **bijective ou non**, et prend en argument un **sous-ensemble** B de F ;
- les notations $f^{-1}(y)$ ou f^{-1}, n'ont de sens **que** lorsque f est **bijective**. Elles désignent alors la bijection réciproque de f, qui prend en argument un **élément** y de F.

3 Relations binaires

En mathématiques (et ailleurs), nous avons régulièrement envie de comparer plusieurs éléments, soit pour dire qu'ils partagent certaines propriétés, soit au contraire pour dire qu'ils diffèrent sur certains points. La notion de relation binaire est introduite pour cela.

3.1 Définitions

Définition.

Soit E un ensemble non vide. On appelle *relation binaire sur* E la donnée d'une partie $\mathscr{R}$ de $E \times E$. Pour tout $(x, y) \in E \times E$, on dit que x *est en relation avec* y si $(x, y) \in \mathscr{R}$. On notera alors $x\mathscr{R}y$.

Exemples.

- Soit E un ensemble, et $\mathscr{R} = \{(x, x) \mid x \in E\}$. Pour tout $(x, y) \in E \times E$, $x\mathscr{R}y$ si, et seulement si, $x = y$.
- Prenons $E = [\![1, 3]\!]$ et $\mathscr{R} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$. Pour tout $(x, y) \in [\![1, 3]\!]^2$, $x\mathscr{R}y$ si, et seulement si, $x \leq y$.
- Prenons $E = [\![1, 4]\!]$ et $\mathscr{R} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$. Pour tout $(x, y) \in [\![1, 4]\!]^2$, $x\mathscr{R}y$ si, et seulement si, x divise y.

Définition.

Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E. On dit que $\mathscr{R}$ est :

- *réflexive* si : $\forall x \in E,\ x\mathscr{R}x$;
- *symétrique* si : $\forall (x, y) \in E^2,\ x\mathscr{R}y \ \Rightarrow\ y\mathscr{R}x$;
- *transitive* si : $\forall (x, y, z) \in E^3,\ x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z \ \Rightarrow\ x\mathscr{R}z$;
- *antisymétrique* si : $\forall (x, y) \in E^2,\ x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x \ \Rightarrow\ x = y$.

Exemples.

- La relation d'égalité sur un ensemble E est réflexive, symétrique, transitive, antisymétrique.
- La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est réflexive, transitive et antisymétrique, mais pas symétrique.
- La relation « être frontalier de », définie sur l'ensemble des pays est une relation symétrique, mais elle n'est pas transitive.

Exercice 5 Étudier la relation de divisibilité sur $\mathbb{Z}$: réflexivité, symétrie, transitivité, antisymétrie.

3.2 Relations d'équivalence

Définition.

On appelle *relation d'équivalence* sur un ensemble E toute relation binaire $\sim$ sur E à la fois réflexive, symétrique et transitive.

Exemples.

- La relation « être dans la même classe que » définie sur l'ensemble des élèves du Lycée Carnot est une relation d'équivalence.
- La relation d'égalité sur un ensemble E est une relation d'équivalence.

- Notons $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan. La relation de colinéarité est une relation d'équivalence sur $\overrightarrow{\mathscr{P}} \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

- Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $M, N \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On dit que M est équivalente par ligne à N, et on note $M \overset{\mathscr{L}}{\sim} N$, si N s'obtient à partir de M à l'aide d'un nombre finis d'opérations élémentaires sur les lignes. Alors $\overset{\mathscr{L}}{\sim}$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Définition.

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un ensemble E, et soit $x \in E$.
On appelle *classe d'équivalence de x pour $\sim$*, et on note $\mathrm{cl}(x)$ ou $\overline{x}$, la partie de E définie par :

$$\mathrm{cl}(x) = \overline{x} = \{y \in E \mid y \sim x\} \in \mathscr{P}(E).$$

Les éléments de $\mathrm{cl}(x) \in \mathscr{P}(E)$ sont appelés les *représentants de la classe de x*.

Propriété 10 (✎)

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un ensemble E.

(1) Pour tout $x, y \in E$, $\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y)$ si, et seulement si, $x \sim y$.

(2) L'ensemble des classes d'équivalences forme une partition de E, c'est-à-dire :

  (i) pour tout $x \in E$, $\mathrm{cl}(x) \neq \emptyset$;
  (ii) pour tout $x, y \in E$ tels que $\mathrm{cl}(x) \neq \mathrm{cl}(y)$, on a $\mathrm{cl}(x) \cap \mathrm{cl}(y) = \emptyset$;
  (iii) $E = \bigcup\limits_{x \in E} \mathrm{cl}(x)$.

Définition.

On appelle *système de représentants* des classes d'équivalence de $\sim$ toute partie R de E qui contient un et un seul élément de chaque classe d'équivalence de $\sim$.
L'ensemble des classes d'équivalences de $\sim$ est appelé l'*ensemble quotient de E par $\sim$* et noté $E/\sim$.

Remarque. Si R désigne un système de représentants des classes d'équivalence de $\sim$, alors $E = \bigsqcup\limits_{x \in R} \mathrm{cl}(x)$, réunion disjointe par définition de R.

Exemples.

- La classe d'équivalence d'un élève de Carnot pour la relation d'équivalence « être dans la même classe » est l'ensemble de ses camarades de classe (y compris lui). Un système de représentants des classes d'équivalences correspond à la désignation d'un délégué par classe.

- Pour tout $x \in E$, la classe d'équivalence de x pour la relation d'égalité est $\mathrm{cl}(x) = \{x\}$.

- La classe d'équivalence d'un vecteur $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathscr{P}} \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ pour la relation de colinéarité est la droite vectorielle dirigée par $\overrightarrow{v}$ privée du vecteur nul. Si pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\overrightarrow{u_\theta}$ le vecteur unitaire du plan tel que $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u_\theta}) \equiv \theta \, [2\pi]$, alors $R = \{\overrightarrow{u_\theta},\, \theta \in [0, \pi[\}$ est un système de représentants de ces classes d'équivalence (de même par exemple que $R = \left\{\overrightarrow{u_\theta},\, \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$).

Propriété 11 (✎)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. La relation $x \sim y \Leftrightarrow x \equiv y[\alpha]$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{cl}(x) = x + \alpha\mathbb{Z}$, et $R = [0, \alpha[$ est un système de représentants des classes d'équivalences.

Remarque. De même si $n \in \mathbb{N}^*$, la relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\overline{k} = k + n\mathbb{Z}$, et $R = [\![0, n-1]\!]$ est un système de représentants des classes d'équivalences (de même que $R = [\![n, 2n-1]\!]$ ou $R = [\![-n+1, 0]\!]$).

3.3 Relations d'ordre

Définition.

On appelle *relation d'ordre* sur un ensemble E toute relation binaire $\preceq$ sur E à la fois réflexive, transitive et antisymétrique. On dit alors que le couple $(E, \preceq)$ est un *ensemble ordonné*.

Exemples.

- La relation $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.
- Si E est un ensemble, la relation d'inclusion $A \subset B$ est une relation d'ordre sur $\mathscr{P}(E)$.
- La relation de divisibilité n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$ puisqu'elle n'est pas antisymétrique : on a par exemple $-1 \mid 1$ et $1 \mid -1$ alors que $1 \neq -1$). En revanche, c'est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$, et $(\mathbb{N}, \mid)$ est un ensemble ordonné.
- Si E est un ensemble et si $(F, \leq)$ est un ensemble ordonné, alors on définit une relation d'ordre (encore notée $\leq$) sur $\mathscr{F}(E, F)$ par :

$$f \leq g \;\Leftrightarrow\; \forall x \in E,\ f(x) \leq g(x).$$

✎ Notation.

Si $\preceq$ est une relation d'ordre sur E, on note souvent $x \prec y$ pour signifier que $x \preceq y$ **et** $x \neq y$. Cette relation est encore transitive, mais ce n'est plus une relation d'ordre, notamment du fait qu'elle n'est plus réflexive : on n'a jamais $x \prec x$.

Exercice 6 Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. On définit une relation binaire $\preceq$ sur $E \times E$ en posant :

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E \times E, \quad (x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \;\Leftrightarrow\; x_1 \prec x_2 \textbf{ ou } \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 \leq y_2 \end{cases}.$$

Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre sur $E \times E$, appelée *ordre lexicographique*.

Remarque. Cette relation se généralise sans grande difficulté à E^n. Remarquons que c'est exactement l'ordre qu'on utilise dans un dictionnaire (d'où le nom) : on compare les premières lettres, si elles sont égales on compare les deuxièmes, etc.

Définition.

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné.

Deux éléments x et y de E sont dits *comparables* si $x \preceq y$ ou $y \preceq x$. Ils sont dits *incomparables* sinon.

La relation d'ordre $\preceq$ est dite *totale* si tous les éléments de E sont comparables, c'est-à-dire pour tout $(x, y) \in E^2$, $x \preceq y$ ou $y \preceq x$. On parle alors d'*ensemble totalement ordonné*.

Dans le cas contraire, on dit que $\preceq$ est un *ordre partiel*, et que $(E, \preceq)$ est *partiellement ordonné*.

Exemples.

- $(\mathbb{R}, \leq)$ est un ensemble totalement ordonné.
- Sur $\mathscr{P}(E)$, la relation d'inclusion est un ordre partiel dès que E possède au moins deux éléments, car si x et y sont deux éléments distincts de E, on n'a ni $\{x\} \subset \{y\}$, ni $\{y\} \subset \{x\}$.
- La relation de divisibilité sur $\mathbb{N}$ est un ordre partiel car on n'a ni $2 \mid 3$, ni $3 \mid 2$.
- Même si $(F, \leq)$ est totalement ordonné, l'ordre $\leq$ sur $\mathscr{F}(E, F)$ n'est pas total dès que E et F contiennent plus de deux éléments. Par exemple, $\mathscr{F}([0,1], \mathbb{R})$ n'est pas totalement ordonné : pour $f : x \in [0,1] \mapsto x$ et $g : x \in [0,1] \mapsto 1 - x$, on n'a ni $f \leq g$ (car $f(1) > g(1)$), ni $g \leq f$ (car $f(0) < g(0)$).

Exercice 7 Soit $(E, \leq)$ un ensemble totalement ordonné. Montrer que $E \times E$ muni de l'ordre lexicographique $\preceq$ est totalement ordonné.

3.4 Majorant, minorant, maximum, minimum

Les définitions qui suivent ont déjà été données pour $(\mathbb{R}, \leq)$. On les étend au cas d'un ensemble ordonné quelconque $(E, \preceq)$.

Définition.

Soient $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et $A \subset E$.

- A est *majorée* si : $\exists a \in E, \forall x \in A, x \preceq a$.

  Si A est majorée, on appelle *majorant* de A tout élément a de E satisfaisant : $\forall x \in A, x \preceq a$.
- A est *minorée* si : $\exists b \in E, \forall x \in A, b \preceq x$.

  Si A est minorée, on appelle *minorant* de A tout élément b de E satisfaisant : $\forall x \in A, b \preceq x$.
- A est *bornée* lorsque A est à la fois majorée et minorée.

Danger.

Un majorant de A n'est pas nécessairement unique, et n'a pas besoin d'appartenir à A

Exemples.

- Pour l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$, 1 est un majorant de $]0,1[$. Tout réel supérieur ou égal à 1 est également un majorant de $]0,1[$.
- Pour la relation de divisibilité sur $\mathbb{N}$, les minorants de l'ensemble $\{8, 10, 12\}$ sont 1 et 2. Et $k \in \mathbb{N}$ est un majorant si, et seulement si, $8 \mid k$, $10 \mid k$ et $12 \mid k$, ce qui équivaut à $120 \mid k$.

Propriété 12

Soient $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et $A \subset E$.

- Si A est majorée et possède un majorant qui est dans A, alors celui-ci est unique.
  Un tel élément, s'il existe, s'appelle *maximum* de A et on le note $\max(A)$.
- Si A est minorée et possède un minorant qui est dans A, alors celui-ci est unique.
  Un tel élément, s'il existe, s'appelle *minimum* de A et on le note $\min(A)$.

Danger.

Toute partie d'un ensemble ordonné n'a pas forcément de plus grand ou de plus petit élément. Par exemple, pour l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$, $]0, 1[$ n'a ni plus grand ni plus petit élément. Il en est de même pour $\mathbb{R}$.

Exemples.

- Dans $(\mathbb{N}, |)$, l'ensemble $\{8, 10, 12\}$ ne possède ni plus grand élément, ni plus petit élément.
- Toujours dans $(\mathbb{N}, |)$, 0 est le plus grand élément de $\mathbb{N}$, et 1 est son plus petit élément.
- L'ensemble ordonné $(\mathscr{P}(E), \subset)$ possède un plus grand élément qui est E, et un plus petit élément qui est $\emptyset$.

Intéressons nous enfin à $\mathbb{N}$ muni de l'ordre usuel. Rappelons que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément, et que cette propriété fondamentale de $\mathbb{N}$ permet d'établir le principe de récurrence. On en déduit également la propriété suivante.

Propriété 13

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.
- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ possède un plus grand élément.

3.5 Borne supérieure, borne inférieure

Définition.

Soient $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et $A \in \mathscr{P}(E)$.

- Supposons A majorée. S'il existe, on appelle *borne supérieure de A* le plus petit des majorants de A. On le note $\sup(A)$.
- Supposons A minorée. S'il existe, on appelle *borne inférieure de A* le plus grand des minorants de A. On le note $\inf(A)$.

Remarques.

- Par définition :

$$\sup(A) = \min\{a \in E \mid a \text{ est un majorant de } A\} = \min\{a \in E \mid \forall x \in A,\ x \preceq a\}.$$

  Ainsi, **sous réserve d'existence**, une telle borne supérieure est unique en tant que plus petit élément de l'ensemble des majorants.

- Par définition :

$$a = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ est un majorant de } A \\ a \text{ est plus petit que tous les majorants de } A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ est un majorant de } A \\ \text{pour tout majorant } m \text{ de } A,\ a \preceq m \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A,\ x \leq a \\ \forall m \in E,\ \underbrace{(\forall x \in E,\ x \in A \Rightarrow x \leq m)}_{m \text{ majorant de } A} \Rightarrow a \leq m \end{cases}$$

Exemples.

- Pour l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$, $]0,1[$ possède une borne supérieure qui vaut 1 et une borne inférieure qui vaut 0.

- Dans $(\mathbb{N}, \mid)$, l'ensemble $\{8, 10, 12\}$ possède une borne inférieure qui est 2 et une borne supérieure qui est 120.

- Une partie peut-être majorée sans avoir de borne supérieure. Prenons par exemple l'ensemble ordonné $(\mathbb{Q}, \leq)$ et la partie
$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\} = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] \bigcap \mathbb{Q}.$$
  La partie A est majorée, par exemple par $2 \in \mathbb{Q}$, et l'ensemble des majorants de A est $\left]\sqrt{2}, +\infty\right[\bigcap \mathbb{Q}$. Celui-ci n'admettant pas de plus petit élément, A n'admet pas de borne supérieure. C'est d'ailleurs l'une des insuffisances de $\mathbb{Q}$ qui motivera dans un prochain chapitre l'introduction des réels.

Exercice 8 On considère l'ensemble ordonné $(\mathscr{P}(E), \subset)$, et deux parties A et B de E. Déterminer, si elles existent, les bornes supérieures et inférieures de $\{A, B\}$.

Propriété 14 (✎)

Si A possède un plus grand (resp. petit) élément, alors A possède une borne supérieure (resp. inférieure) et $\sup(A) = \max(A)$ (resp. $\inf(A) = \min(A)$).