Université Paris 7 | MT1 MM1
L1, Sciences exactes | 2010-2011

SECTION B (Cours : B. Gentou)

salle 574F (A à C), amphi 8C (D à O), salle 575F (P à Z)

Partiel du 13 novembre 2010

Durée : 3 heures. Sans document, ni calculette, téléphones mobiles éteints et rangés.

Exercice 1. ***Questions de cours***

1. Soit n un entier naturel non nul et soient z_0 et z des nombres complexes non nuls tels que $z_0^n = z$. Donner toutes les racines n-ièmes de z.

2. Soit F une partie de $\mathbb{R}^n$, à quelles conditions F est-il un sous-espace de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$?

3. Soient E et F des ensembles et $f : E \to F$ une application.
Donner la définition de la surjectivité de f.
Puis donner un exemple d'application surjective de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$.

Exercice 2.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante en exprimant toutes les racines sous forme algébrique :

$$\frac{1}{2}\, z^2 + 2\sqrt{2}\, z + 3 + i = 0\,.$$

Exercice 3.
On considère l'application :

$$\begin{aligned} f : [-\pi,\pi] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos x\,. \end{aligned}$$

1. Décrire les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$:

$$f^{-1}\big(\{0\}\big)\,, \quad f^{-1}\big(\,]0,+\infty[\,\big)\,, \quad f^{-1}\big([-1,0]\big)\,, \quad f\big([-\pi/6,\, \pi/3[\big)\,, \quad f\big([\pi/2,\, \pi]\big)\,.$$

2. Donner un exemple de partie A de $[-\pi, \pi]$ pour laquelle :

$$f^{-1}\big(f(A)\big) \neq A\,.$$

Exercice 4.

1. Soit $n \geq 3$ un entier, montrer que le polynôme $P(x) = nx^n - (n+1)x^{n-1} - x + 2$ est divisible par $(x-1)^2$.

2. Soit $n \geq 1$ un entier, montrer que le polynôme $Q(x) = (x-3)^{2n} + (x-2)^n - 1$ est divisible par le polynôme $x^2 - 5x + 6$.
Indication : on pourra commencer par vérifier que 2 *et* 3 *sont des racines de* $Q(x)$.

Exercice 5.

1. Donner la forme polaire des racines complexes du polynôme $A(x) = x^5 - 1$.
2. Justifier l'existence du polynôme B tel que $A(x) = (x-1)B(x)$, puis calculer B par une division euclidienne.
3. Déduire des questions précédentes la factorisation de B en polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Puis donner la factorisation de B en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

   Dans les trois questions suivantes, on veut établir d'une autre manière la factorisation de B afin de répondre à la question finale de l'exercice.
4. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ non nul, on pose $E(z) = z^2\left[\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 + \left(z+\frac{1}{z}\right) - 1\right]$.
   Montrer que E est un polynôme que l'on calculera.
5. Factoriser le polynôme $P(x) = x^2 + x - 1$.
6. A l'aide du changement de variable $x = z + \dfrac{1}{z}$, en déduire une factorisation de $E(z)$ en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
7. En utilisant l'unicité de la factorisation en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, déduire de ce qui précède une expression algébrique exacte de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ et $\cos\dfrac{\pi}{5}$.

Exercice 6.
On considère la partie suivante de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x + 3y - 2z + 4t = 0 \text{ et } 2x + 5y + 4z - t = 0\right\}$$

1. Prouver que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base de F.

Exercice 7.
On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$: $u_1 = (1,-2,1,-3)$, $u_2 = (3,-7,4,-5)$ et $u_3 = (2,-1,0,-9)$.

1. Montrer que la famille (u_1,u_2,u_3) est une famille libre.
2. A l'aide d'un théorème du cours que l'on citera, montrer sans calcul que (u_1,u_2,u_3) n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$.
3. Déterminer une équation du sous-espace vectoriel F engendré par la famille (u_1,u_2,u_3).