Correction du partiel du 13/11/10

Exercice 1. ***Questions de cours***

1. Soit n un entier naturel non nul et soient z_0 et z des nombres complexes non nuls tels que $z_0^n = z$.
   Donner toutes les racines n-ièmes de z.
2. Soit F une partie de $\mathbb{R}^n$, à quelles conditions F est-il un sous-espace de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$?
3. Soient E et F des ensembles et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application.
   Donner la définition de la surjectivité de f.
   Puis donner un exemple d'application surjective de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$.

Correction :

1. *z_0 est une racine n-ième de z, donc les n racines n-ièmes de z s'obtiennent en multipliant z_0 par chacune des n racines n-ièmes de l'unité, ce sont donc les n nombres $z_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$ où $k \in \{0, \dots, n-1\}$.*

2. *F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si le vecteur nul appartient à F et F est stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire pour tous réels λ et μ, pour tous vecteurs x et y de F, $\lambda x + \mu y \in \mathrm{F}$.*
   On peut également dire que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si F n'est pas vide et F est stable pour l'addition des vecteurs et pour la multiplication d'un vecteur par un réel.

3. *$f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est surjective si et seulement si tout élément de F a au moins un antécédent par f dans E.*
   Formulation symbolique : $\forall y \in \mathrm{F},\ \exists x \in \mathrm{E}, f(x) = y$.
   Exemple d'application surjective de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$ *: la fonction exponentielle.*

Exercice 2.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante en exprimant toutes les racines sous forme algébrique :

$$\frac{1}{2}\, z^2 + 2\sqrt{2}\, z + 3 + \mathrm{i} = 0\,.$$

Correction :
Le discriminant de cette équation est $\Delta = (2\sqrt{2})^2 - 2(3+\mathrm{i}) = 2 - 2\mathrm{i}$.
Calculons les racines carrées de Δ sous la forme $x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels. On a les équivalences :

$$(x+iy)^2 = 2 - 2\mathrm{i} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 2 \\ 2xy = -2 \\ x^2 + y^2 = 2\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 = \sqrt{2} + 1 \\ y^2 = \sqrt{2} - 1 \\ xy = -1 \end{array}\right.$$

Les racines carrées de Δ sont donc $\sqrt{\sqrt{2}+1} - \mathrm{i}\sqrt{\sqrt{2}-1}$ et $-\sqrt{\sqrt{2}+1} + \mathrm{i}\sqrt{\sqrt{2}-1}$.
On en déduit que les solution de l'équation sont

$$z_1 = -2\sqrt{2} + \sqrt{\sqrt{2}+1} - \mathrm{i}\sqrt{\sqrt{2}-1} \quad \textit{et} \quad z_2 = -2\sqrt{2} - \sqrt{\sqrt{2}+1} + \mathrm{i}\sqrt{\sqrt{2}-1}$$

Exercice 3.
On considère l'application :

$$f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \cos x\,.$$

1. Décrire les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$:

$$f^{-1}\big(\{0\}\big)\,,\quad f^{-1}\big(\,]0,+\infty[\,\big)\,,\quad f^{-1}\big([-1,0]\big)\,,\quad f\big([-\pi/6,\,\pi/3[\big)\,,\quad f\big([\pi/2,\,\pi]\big)\,.$$

2. Donner un exemple de partie A de $[-\pi,\pi]$ pour laquelle :

$$f^{-1}\big(f(\mathrm{A})\big) \neq \mathrm{A}\,.$$

Correction : *D'après les propriétés de la fonction cosinus, le tableau de variation de f est :*

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

Ce tableau de variation et la continuité de f justifient les réponses suivantes :

1. $f^{-1}\big(\{0\}\big) = \big\{-\frac{\pi}{2}\big\} \cup \big\{\frac{\pi}{2}\big\}$, $\quad f^{-1}\big(\,]0,+\infty[\,\big) = \big]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\big[$, $\quad f^{-1}\big([-1,0]\big) = \big[-\pi,-\frac{\pi}{2}\big] \cup \big[\frac{\pi}{2},\pi\big]$.
   $f\big([-\frac{\pi}{6},\,\frac{\pi}{3}[\big) =]\frac{1}{2},1]$ *car* $\quad \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} < \cos(-\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
   $f\big([\frac{\pi}{2},\,\pi]\big) = [-1,0]$.
2. *Par exemple* $\mathrm{A} = \{\frac{\pi}{2}\}$, *on a* $f(\mathrm{A}) = \{0\}$ *et* $f^{-1}\big(\{0\}\big) = \{-\frac{\pi}{2}\} \cup \{\frac{\pi}{2}\}$ *donc* $f^{-1}\big(f(\mathrm{A})\big) \neq \mathrm{A}$.

Exercice 4.

1. Soit $n \geqslant 3$ un entier, montrer que le polynôme $\mathrm{P}(x) = n\,x^n - (n+1)\,x^{n-1} - x + 2$ est divisible par $(x-1)^2$.
2. Soit $n \geqslant 1$ un entier, montrer que le polynôme $\mathrm{Q}(x) = (x-3)^{2n} + (x-2)^n - 1$ est divisible par le polynôme $x^2 - 5x + 6$.
   Indication : on pourra commencer par vérifier que 2 *et* 3 *sont des racines de* $\mathrm{Q}(x)$.

Correction :

1. *Le polynôme* $\mathrm{P}(x)$ *est divisible par* $(x-1)^2$ *si et seulement* 1 *est une racine au moins double de* P *c'est-à-dire si* $\mathrm{P}(1) = \mathrm{P}'(1) = 0$.
   Or $\mathrm{P}(1) = n - (n+1) - 1 + 2 = 0$,
   et, comme $n - 1 \geqslant 1$, $\quad \mathrm{P}'(x) = n^2\,x^{n-1} - (n+1)(n-1)\,x^{n-2} - 1$
   donc $\mathrm{P}'(1) = n^2 - (n+1)(n-1) - 1 = n^2 - (n^2-1) - 1 = 0$.
   Conclusion *:* $\mathrm{P}(x)$ *est divisible par* $(x-1)^2$

2. Le polynôme unitaire $\mathrm{T}(x) = x^2 - 5x + 6$ *a pour racines* 2 *et* 3 *donc sa factorisation dans* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *est* $\mathrm{T}(x) = (x-2)(x-3)$.
Il suit que $\mathrm{T}(x)$ *divise* $\mathrm{Q}(x)$ *si et seulement si* $\mathrm{Q}(x)$ *est factorisable par* $(x-2)(x-3)$ *c'est-à-dire si* 2 *et* 3 *sont des racines de* $\mathrm{Q}(x)$.
Or $\mathrm{Q}(2) = (2-3)^{2n} + (2-2)^n - 1 = (-1)^{2n} - 1 = 0$
et $\mathrm{Q}(3) = (3-3)^{2n} + (3-2)^n - 1 = 1^n - 1 = 0$.
Conclusion *:* $\mathrm{Q}(x)$ *est divisible par* $x^2 - 5x + 6$.

Exercice 5.

1. Donner la forme polaire des racines complexes du polynôme $\mathrm{A}(x) = x^5 - 1$.
2. Justifier l'existence du polynôme B tel que $\mathrm{A}(x) = (x-1)\mathrm{B}(x)$, puis calculer B par une division euclidienne.
3. Déduire des questions précédentes la factorisation de B en polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$. Puis donner la factorisation de B en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

   Dans les trois questions suivantes, on veut établir d'une autre manière la factorisation de B *afin de répondre à la question finale de l'exercice.*
4. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ non nul, on pose $\mathrm{E}(z) = z^2\Big[\Big(z + \frac{1}{z}\Big)^2 + \Big(z + \frac{1}{z}\Big) - 1\Big]$.
   Montrer que E est un polynôme que l'on calculera.
5. Factoriser le polynôme $\mathrm{P}(x) = x^2 + x - 1$.
6. A l'aide du changement de variable $x = z + \dfrac{1}{z}$, en déduire une factorisation de $\mathrm{E}(z)$ en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
7. En utilisant l'unicité de la factorisation en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, déduire de ce qui précède une expression algébrique exacte de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ et $\cos\dfrac{\pi}{5}$.

Correction :

1. Les racines complexes du polynôme $\mathrm{A}(x) = x^5 - 1$ *sont les racines cinquième de l'unité, c'est-à-dire les cinq nombres suivants :*

$$u_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}} \quad \textit{avec } k \in \{0, \ldots, 4\}.$$

Ce sont toutes des racines simples.

2. Le polynôme $\mathrm{A}(x) = x^5 - 1$ *a pour racine* 1 *donc il est divisible par* $x - 1$ *ce qui signifie qu'il existe un polynôme* B *tel que* $\mathrm{A}(x) = (x-1)\mathrm{B}(x)$.

On peut calculer B *en effectuant la division division euclidienne de* $\mathrm{A}(x)$ *par* $x-1$ *:*

$$
\begin{array}{ccccccc|l}
 & x^5 & & & & & -1 & x-1 \\
\ominus & x^5 & -x^4 & & & & & \\
 & & x^4 & & & & -1 & x^4+x^3+x^2+x+1 \\
\ominus & & x^4 & -x^3 & & & & \\
 & & & x^3 & & & -1 & \\
\ominus & & & x^3 & -x^2 & & & \\
 & & & & x^2 & & -1 & \\
\ominus & & & & x^2 & -x & & \\
 & & & & & x & -1 & \\
\ominus & & & & & x & -1 & \\
 & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

On obtient $\mathrm{B}(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

3. *D'après le 1., la factorisation de* $\mathrm{A}(x)$ *dans* $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ *est* $\mathrm{A}(x) = \prod_{k=0}^{4}(x - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}}) = (x-1)\prod_{k=1}^{4}(x - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}})$.
   Par identification, on en déduit que la factorisation de $\mathrm{B}(x)$ *dans* $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ *est*
   $$\mathrm{B}(x) = \prod_{k=1}^{4}(x - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}})$$
   La factorisation de B *dans* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *se déduit de celle dans* $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ *en regroupant les facteurs correspondants aux racines non réelles conjuguées, i.e.* u_1 *et* u_4, u_2 *et* u_3, *ce qui donne :*
   $(x-u_1)(x-u_4) = x^2 - 2\,Re(u_1)\,x + |u_1| = x^2 - 2\left(\cos\frac{2\pi}{5}\right)\,x+1$
   $(x-u_2)(x-u_3) = x^2 - 2\,Re(u_2)\,x + |u_2| = x^2 - 2\left(\cos\frac{4\pi}{5}\right)\,x+1$
   La factorisation de P *dans* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *est donc :*
   $$\mathrm{B}(x) = \left(x^2 - 2\left(\cos\frac{2\pi}{5}\right)\,x+1\right)\left(x^2 - 2\left(\cos\frac{4\pi}{5}\right)\,x+1\right).$$

4. *Soit* $z \in \mathbb{C}$ *non nul,* $\mathrm{E}(z) = (z^2+1)^2 + z^3 + z - z^2 = z^4 + 2z^2 + 1 + z^3 + z - z^2 = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$
   On en déduit que E *est le polynôme* B.

5. $\mathrm{P}(x) = x^2 + x - 1$ *a pour discriminant* 5 *et pour racines* $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ *et* $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.
   On en déduit la factorisation suivante : $\mathrm{P}(x) = (x + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2})\,(x + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2})$.

6. *Soit* $z \in \mathbb{C}$ *non nul, on pose* $x = z + \frac{1}{z}$, *d'après la question précédente,*
   $\mathrm{E}(z) = z^2\mathrm{P}(x) = z^2(x + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2})\,(x + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}) = z^2(z + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2})\,(z + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2})$
   Donc $\mathrm{E}(z) = (z^2 + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\,z + 1)\,(z^2 + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\,z + 1)$ $\quad$ (I).
   Comme $\mathrm{E}(z) = \mathrm{B}(z)$, (I) *est une factorisation de* B *dans* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *en deux polynômes de degré 2. Ces deux polynômes sont irréductibles sinon, dans la question 3, on aurait trouvé au moins un polynôme de degré 1 dans la factorisation en polynômes irréductibles de* B.
   On en conclut que (I) *est la factorisation de* E *et* B *en polynômes irréductibles de* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

7. *Comme la factorisation en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ est unique, on peut identifier les facteurs obtenus dans les questions 3 et 6. On en déduit que* $\{-2\cos\frac{2\pi}{5}, -2\cos\frac{4\pi}{5}\} = \{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$.
Pour identifier individuellement les éléments de ces deux ensembles, il faut ordonner chaque ensemble.
Comme $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{5} < \pi$ *, et que la fonction cosinus est strictement décroissante sur* $[0,\pi]$*, on a* $\cos\frac{2\pi}{5} > 0 > \cos\frac{4\pi}{5}$ *, donc* $-2\cos\frac{2\pi}{5} < 0 < -2\cos\frac{4\pi}{5}$.
De plus $\sqrt{5} > 1$ *donc* $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
On en conclut d'une part que $-2\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ *donc* $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$,
et d'autre part que $-2\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *donc* $\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.
Enfin, comme $\cos\frac{4\pi}{5} = \cos(\pi - \frac{\pi}{5}) = -\cos(\frac{\pi}{5})$*, il suit que* $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.
Conclusion *:* $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ *et* $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

Exercice 6.
On considère la partie suivante de $\mathbb{R}^4$:

$$\mathrm{F} = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x+3y-2z+4t=0 \;\text{ et }\; 2x+5y+4z-t=0\right\}$$

1. Prouver que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base de F.

Correction :

1. F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$*, car c'est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à 3 inconnues.*
Remarque *: les propriétés de SEV peuvent aussi se vérifier directement :* F *contient le vecteur nul et* F *est stable par combinaison linéaire (à écrire).*
2. *Soit* $v = (x,y,z,t)$ *un vecteur de* $\mathbb{R}^4$. $v \in \mathrm{F} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y-2z+4t=0 \\ 2x+5y+4z-t=0 \end{cases}$.
On échelonne ce système par la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} x+3y-2z+4t=0 \\ 2x+5y+4z-t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y-2z+4t=0 \; (\mathrm{L}_1) \\ -y+8z-9t=0 \quad (\mathrm{L}_2-2\mathrm{L}_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+22z-23t=0 \; (\mathrm{L}_1+3\mathrm{L}_2) \\ y-8z+9t=0 \; (-\mathrm{L}_2) \end{cases}$$

Ce système échelonné admet deux inconnues secondaires z et z. En posant $z=\lambda$ *et* $t=\mu$*, on en déduit que* $v \in \mathrm{F} \Leftrightarrow \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R},\; v = \lambda \begin{pmatrix} -22 \\ 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 23 \\ -9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
F *est donc le plan vectoriel de base* (u_1,u_2) *avec* $u_1 = (-22,8,1,0)$ *et* $u_2 = (23,-9,0,1)$.

Exercice 7.
On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$: $u_1 = (1,-2,1,-3)$, $u_2 = (3,-7,4,-5)$ et $u_3 = (2,-1,0,-9)$.

1. Montrer que la famille (u_1,u_2,u_3) est une famille libre.
2. A l'aide d'un théorème du cours que l'on citera, montrer sans calcul que (u_1,u_2,u_3) n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$.

3. Déterminer une équation du sous-espace vectoriel F engendré par la famille (u_1, u_2, u_3).

Correction :

1. *Soient* α_1, α_2 *et* α_3 *quelconques dans* $\mathbb{R}$ *tels que* $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ *(1).*

   En notant les vecteurs en colonne, (1) s'écrit : $\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   On échelonne ce système par la méthode du pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & -7 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & -9 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 + 2\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_4 + 3\mathrm{L}_1 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{L}_1 \\ -\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_4 + 4\mathrm{L}_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_4 - 9\mathrm{L}_3 \end{array}$$

   Dans ce système homogène échelonné, chaque inconnue possède un pivot donc il admet une solution unique qui est $(0, 0, 0)$.

   On en conclut que (u_1, u_2, u_3) *est une famille libre.*

2. *D'après le cours : "Dans un espace vectoriel de dimension* n*, le cardinal d'une famille génératrice est au moins* n*". Or* $\mathbb{R}^4$ *est de dimension 4 et* (u_1, u_2, u_3) *est de cardinal 3 donc cette famille ne peut pas être génératrice de* $\mathbb{R}^4$.

3. *On recherche les vecteurs* $v = (x, y, z, t)$ *de* $\mathbb{R}^4$ *qui sont des combinaisons linéaires de* (u_1, u_2, u_3)*, c'est-à-dire tels qu'il existe des réels* α_1, α_2, α_3 *vérifiant* $(x, y, z, t) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$ *(2).*

   On échelonne le système (2) par la méthode du pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & x \\ -2 & -7 & -1 & y \\ 1 & 4 & 0 & z \\ -3 & -5 & -9 & t \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & x \\ 0 & -1 & 3 & 2x + y \\ 0 & 1 & -2 & -x + z \\ 0 & 4 & -3 & 3x + t \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 + 2\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_4 + 3\mathrm{L}_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & x \\ 0 & 1 & -3 & -2x - y \\ 0 & 0 & 1 & x + y + z \\ 0 & 0 & 9 & 11x + 4y + t \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{L}_1 \\ -\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_4 + 4\mathrm{L}_2 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & x \\ 0 & 1 & -3 & -2x - y \\ 0 & 0 & 1 & x + y + z \\ 0 & 0 & 0 & 2x - 5y - 9z + t \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_4 - 9\mathrm{L}_3 \end{array}$$

   Ce système échelonné admet des solutions si et seulement si $0 = 2x - 5y - 9z + t$.

   On en conclut qu'une équation du sous espace $\mathrm{F} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ *est* $\quad 2x - 5y - 9z + t = 0$.