Interrogation du Mardi 30 Novembre 2010

1. (i) Rappeler la définition de la borne supérieure d'une partie non vide de $\mathbb{R}$, ainsi que sa caractérisation.

(ii) Après avoir justifié qu'elles existent, calculer les bornes supérieures et inférieures de l'ensemble $A = \{exp(-n) + (-1)^n | n \in \mathbb{N}\}$. Préciser, s'ils existent, le plus grand et le plus petit élément de A.

2. (i) Soit $f : I \to \mathbb{R}$, où I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $x_0 \in I$. On suppose que f a pour limite $l \in \mathbb{R}$ en x_0. Rappeler la définition de la limite dans ce cas.

(ii) On suppose à présent que f est définie au voisinage de $+\infty$, et qu'elle tend vers $-\infty$ en $+\infty$. Rappeler la définition de la limite dans ce cas.

3. Calculer les limites suivantes, si elles existent :

$$(i) \lim_{x \to -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 2x - 3} \qquad (ii) \lim_{x \to 0} x \lfloor \tfrac{1}{x} \rfloor$$

4. Soit la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$, $v_1 = (1, 1, -1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1, 0)$, $v_3 = (1, 2, 0, 1)$, $v_4 = (0, 3, -3, 1)$ et $v_5 = (-2, 0, 1, 1)$.

(i) Chercher les relations de dépendance linéaire entre ces vecteurs. Si ces vecteurs sont dépendants, extraire de la famille une base $\mathcal{B}$ de l'espace qu'elle engendre. En déduire le rang de la famille de vecteurs.

(ii) Déterminer la ou les équations définissant le sous-espace $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle$.

(iii) (Bonus) Compléter $\mathcal{B}$ en une base de $\mathbb{R}^4$.