Interrogation du Jeudi 21 Octobre 2010

1. Soient E, F, G et H quatres ensembles, et $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications. Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g et h sont bijectives. On pourra utiliser des résultats vu en TD sans les démontrer.

2. Soient E, F, G trois ensembles, et $f : E \to F$, $g : E \to G$ deux applications. On considère l'application

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \times G \\ x & \longmapsto & (f(x), g(x)) \end{array} \right.$$

(i) Montrer que si f ou g est injective, alors h est injective.

(ii) On suppose f et g surjectives. h est-elle surjective ?

3. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'application suivante

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P(x) & \longmapsto & P(a) \end{array} \right.$$

(i) L'application φ est-elle injective ? surjective ?

(ii) Montrer que $\varphi^{-1}(\{0\})$ est égal à $\{(x-a)Q(x) | Q(x) \in \mathbb{R}[X]\}$. On **citera** avec précision le théorème du cours utilisé.

(iii) Considérons l'ensemble $F := \{P(x) = x - \lambda | \lambda \in \mathbb{R}\}$. Montrer que la restriction $\varphi_{|F}$ de l'application φ à F est bijective.

4. Déterminer le reste de la division euclidienne de $A(x) = (x-3)^{2n} + (x-2)^n - 2$ par $B(x) = (x-2)(x-3)$.