Interrogation du Jeudi 9 Décembre 2010

1. Soient A et B des parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Montrer que $A \cup B$ admet une borne supérieure, et que $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

2. Montrer que la fonction $x \mapsto sin(x^2)$ n'admet pas de limite en $+\infty$. On pourra pour cela considérer deux suites (u_n) et (v_n).

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, telle que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Le but de l'exercice est de montrer que f admet un minimum global. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) > 0$.

(i) Rappeler les définitions de limites pour f en $+\infty$ et $-\infty$.

(ii) Montrer qu'il existe $A_1, A_2 > 0$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x \leqslant -A_1 \Rightarrow f(x) \geqslant f(x_0)$$

$$x \geqslant A_2 \Rightarrow f(x) \geqslant f(x_0)$$

(iii) Montrer qu'il existe $x_1 \in [-A_1; A_2]$ tel que $f(x_1) = \underset{x \in [-A_1; A_2]}{inf} f(x)$. On **citera** avec précision le résultat du cours utilisé.

(iv) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \geqslant min\{f(x_0), f(x_1)\}$. Conclure que f admet un minimum global, atteint en x_0 ou x_1.

4. Calculer les limites suivantes, si elles existent :

$$(i) \lim_{x \to +\infty} x(\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 + x - 2}) \quad (ii) \lim_{x \to 0} (x^2 + x) ln(x^2) \quad (iii) \lim_{x \to +\infty} \left(e^{-\sqrt{ln(x)}} cos(x) \frac{2x^2 + 2x - 1}{3x^2 - 3x} \right)$$

5. Soit $f : \mathbb{R} \to \{-1, 1\}$ une fonction continue. Montrer que f est la fonction constante égale à 1 ou à -1. On **citera** avec précision le résultat du cours utilisé.