Feuille de TD n° 8

Dérivation

Exercice 1.
Soit f une fonction dérivable en 0. Montrer que $x \mapsto f(|x|)$ est dérivable en 0 si et seulement si $f'(0) = 0$.

Exercice 2.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

a) Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.

b) La dérivée de f est-elle continue ?

Exercice 3.
On considère la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{1+x^3} - \sqrt{1-x^3} \end{array}$$

a. Justifier la définition de f puis montrer que f est continue.

b. Calculer la dérivée de f sur $]-1,1[$.

c. Etudier la dérivabilité de f en -1 et 1.

d. Déterminer l'ensemble image $I = f([-1,1])$.

e. Démontrer soigneusement que f est bijective de $[-1,1]$ vers I.
Quelles propriétés de la fonction réciproque $f^{-1} : I \to [-1,1]$ peut-on déduire des questions précédentes ? (Justifier)

Exercice 4.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + e^x$.

a. Montrer que f est bijective.

b. On note g la bijection réciproque de f à $[1, +\infty[$. Donner le tableau de variation de g avec ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.

c. Que peut-on dire de la continuité et de la dérivabilité de g ?

d. Déterminer $g'(1)$.

Exercice 5.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 3x$.

a. Etudier les variations de f en justifiant les résultats obtenus. Calculer les valeurs prises par f en 1, 2 et 3. Dessiner l'allure de son graphe.

b. On note g la restriction de f à $[1, +\infty[$. Montrer que $g([1, +\infty[)$ est un intervalle de la forme $[\alpha, +\infty[$, où α est un réel que l'on précisera.

c. Montrer que g est bijective de $[1, +\infty[$ sur $[\alpha, +\infty[$ et que l'application réciproque $g^{-1} : [\alpha, +\infty[\to [1, +\infty[$ est continue et strictement monotone.

d. Montrer que l'application g^{-1} est dérivable sur $]\alpha, +\infty[$. Est-elle dérivable en α ?

e. Déterminer les valeurs de la dérivée de g^{-1} en 2 et en 18.

Exercice 6.
On considère la fonction f définie par

$$f: \begin{array}{ccc}]0, \frac{\pi}{2}[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(\tan x) \end{array}$$

a. Démontrer, en rappelant les théorèmes utilisés, que f définit une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}[$ vers un ensemble J que vous préciserez.

b. La réciproque de f est-elle continue sur J ? Justifiez.

c. Justifier la dérivabilité sur J de la réciproque de f et calculer sa dérivée.

Exercice 7.
On considère la fonction définie sur $[0, \pi^2]$ par $g(x) = 1 - \cos\sqrt{x}$.

a. Montrer que g est strictement croissante ; en déduire que c'est une bijection de $[0, \pi^2]$ dans un ensemble qu'on précisera.

b. Étudier la dérivabilité de la fonction réciproque g^{-1}, et calculer cette dérivée si elle existe.

Exercice 8.
Soit $b > a$ et $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable dont la dérivée est bornée. Montrer que f est bornée.

Exercice 9.
Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$. On suppose que toutes les racines de P sont réelles et simples. Montrer avec le théorème de Rolle que toutes les racines de P' sont réelles et simples.

Exercice 10.
Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$ et f et g des fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ quelque soit $x \in]a, b[$.

a. Montrer que l'on a $g(x) - g(a) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b]$.

b. On pose $p = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.
Soit $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $u(x) = f(x) - p\, g(x)$. Montrer que $u(a) = u(b)$.
En déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

c. On suppose que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$ avec $l \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = l$.

Exercice 11. Soit $P(x)$ une fonction polynôme. Montrer que l'équation $P(x) = exp(x)$ n'a qu'un nombre fini de solutions.

Exercice 12.

a. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour $x \geq 0$:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

b. En déduire que $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2\sqrt{n} - 1$.

c. En déduire que (u_n) diverge.

d. *Question de recherche :* adapter ce raisonnement pour montrer que $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ diverge.