Feuille de TD n° 7

Continuité

Exercice 1. Étudier la continuité des fonctions suivantes :

a. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$;

b. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(2x).$$

Montrer que f est constante.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 3x + 2$. Quels sont les intervalles minimaux sur lesquels f est injective ? En déduire des restrictions bijectives de f et déterminer les bijections réciproques correspondantes.

Exercice 4. a. Peut-on trouver une application continue et bijective de $[0, 1[$ sur $]0, 1[$?

b. Peut-on trouver une application continue et injective de $]0, 1[$ dans $[0, 1[$?

c. Peut-on trouver une application continue et injective de $[0, 1[$ dans $]0, 1[$?

d. Peut-on trouver une application continue et surjective de $]0, 1[$ dans $[0, 1[$?

e. Peut-on trouver une application continue et surjective de $]0, 1[$ dans $[0, 1]$?

Exercice 5. Justifier les réponses aux questions suivantes :

a. Existe-t-il une application $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue et telle que $f([0, 1]) = [0, 1] \cup [2, 3]$?

b. Existe-t-il une application $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue et surjective ?

c. Existe-t-il une application $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ continue, strictement croissante et telle que $f(]0, 1[) = [0, 1]$?

Exercice 6. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue, telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $x_1, x_2 \in [0, 1]$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$ et $x_1 - x_2 = \frac{1}{2}$.

Exercice 7. a. Soient $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continues telles que $f(x) < g(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que, $\forall x \in [0, 1]$, on a $f(x) + m < g(x)$.

b. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application bornée sur $\mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornée sur $\mathbb{R}$.