Feuille de TD n° 6

Propriétés de $\mathbb{R}$ - Limites de fonctions réelles - Suites définies par une récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 1. Soient x, y et z des réels vérifiant $0 < a \leqslant x \leqslant b$, $d \leqslant y \leqslant c < 0$ et $0 < e \leqslant z \leqslant f$. Déterminer des encadrements de $4x - 2y$, xy, $\dfrac{x-y}{z}$.

Exercice 2. Démontrer que :

a. $\forall x \in]0,1[,\ \forall k \in \mathbb{N}, 0 \leqslant x^k(1-x)^k \leqslant x^k$.

b. $\forall x \in]0,1[,\ \forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k(1-x)^k \leqslant \frac{1}{1-x}$.

c. $\forall x \in]0,1[,\ \forall k \in \mathbb{N}, 0 \leqslant x^k(1-x)^k \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^k$.

d. $\forall x \in]0,1[,\ \forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k(1-x)^k \leqslant \frac{4}{3}$.

Exercice 3. Déterminer les bornes supérieures et inférieures des ensembles $A = \{a + bn, n \in \mathbb{N}\}$ où $a, b \in \mathbb{N}^*$, et $B = \{\frac{1}{n} + (-1)^n | n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 4. Soient A et B des parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Montrer que $A \cup B$ est majorée, et que $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

Exercice 5. Soient A et B des parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On considère l'ensemble $A + B = \{x + y, x \in A \text{ et } y \in B\}$.

a. Montrer que $A + B$ est majoré, en déduire qu'il admet une borne supérieure.

b. Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Exercice 6. Soient A et B des parties non vides de $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, $x \leqslant y$.

a. Montrer que A admet une borne supérieure et que B admet une borne inférieure.

b. Montrer que $\sup(A) \leqslant \inf(B)$.

Exercice 7. Soit x un réel.

a. Montrer que si x est entier, alors $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = 0$.

b. Montrer que si x n'est pas entier, alors $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -1$.

Exercice 8.

a. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^{+*}$, et pour tout couple de nombres réels (x, y) appartenant à $]-\infty, -a]$ ou à $[a, \infty[$, on a : $|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}| \leqslant \dfrac{1}{a^2}|x - y|$.

b. En déduire que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$|x - x_0| < \alpha \ \Rightarrow \ |\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}| < \varepsilon.$$

c. En déduire que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$.

Exercice 9.

a. Rappeler que pour tout nombre réels $\alpha > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\dfrac{1}{2n\pi} < \alpha$.

b. Montrer que pour tout nombre réel l, et pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in]-\alpha, \alpha[$ tel que :

$$\left|\sin\frac{1}{x} - l\right| > \frac{1}{2}.$$

c. En déduire que la fonction $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ n'a pas de limite lorsque x tend vers 0.

Exercice 10. Peut-on prolonger par continuité en 0 la fonction f définie par $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 11. Soit f une fonction définie sur un intervalle I ouvert contenant x_0. On suppose que f admet pour limite $l > 0$ en x_0.

Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que si $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ et $x \neq x_0$ alors $f(x) > \dfrac{l}{2}$.

Exercice 12. Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f(x) = xE(x)$.

Exercice 13.
Montrer que si f est une fonction réelle définie et continue sur un intervalle I, alors $|f|$ l'est aussi. Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 14. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\sin x$.

a. Démontrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction f n'est ni majorée ni minorée sur $[a, \infty[$.

b. La fonction f admet-elle une limite lorsque x tend vers $+\infty$?

Exercice 15.

a. Soit $f\ : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante et négative. Montrer que f a une limite finie l en $+\infty$ et que $l = \sup\{f(x)/x \geqslant 0\}$.

b. Soit $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un fonction croissante, montrer qu'elle admet en tout point $x \in \mathbb{R}$ une limite à gauche et une limite à droite.
Donner un exemple d'une telle fonction n'ayant pas de limite en 0.

Exercice 16. Montrer qu'une fonction périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ayant une limite quand x tend vers $+\infty$ est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17. Soit f et g des fonctions réelles définies et continues sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que si f ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$ alors f est soit toujours positive, soit toujours négative.

b. Montrer que si f ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$ et si $|f| = |g|$ alors $f = g$ ou $f = -g$.

c. Donner deux fonctions continues f et g vérifiant $|f| = |g|$ mais telles que $f \neq g$ et $f \neq -g$.

Exercice 18.

a. Montrer que toute application continue d'un segment dans lui-même admet un point fixe (i.e. il existe x tel que $f(x) = x$).
Indication : on utilisera la fonction $g = f - Id$.

b. Soit $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Montrer qu'elle a un point fixe : il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = x_0$.

c. Soit $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique. Montrer qu'elle est bornée. En déduire qu'elle admet un point fixe.

Exercice 19.

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant des limites finies en $-\infty$ et $+\infty$. Montrer que f est bornée.

b) Donner une fonction continue bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui n'admet pas de limites en $-\infty$ et $+\infty$.

Exercice 20. On rappelle les limites suivantes (à savoir) :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \quad .$$

Lorsque les limites suivantes existent, les déterminer :

1. $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^3+1}}{\sqrt{x^3+2}}$

2. $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{1-e^x}{1+e^x}$ et $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{1-e^x}{1+e^x}$

3. $\displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x-2}{x^4-5x^3+6x^2+4x-8}$

4. $\displaystyle \lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x^2-9} \cos \pi x$

5. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x}{a} E\left(\frac{b}{x}\right)$ où $a, b > 0$

6. $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x$

7. $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}$

8. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x^2+2|x|}{x}$

9. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$

10. $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}}$

11. $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1}$

12. $\displaystyle \lim_{x\to-\infty} x(\sqrt{1+x^2}+x)$

13. $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ \sin(\frac{1}{\sqrt{x}})$

14. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$

15. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 2x}{x^2}$

16. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}$

17. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (1 + \frac{\sqrt{(x^2+1)|\sin(x)|}}{x})$

18. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} 2x\ln(x+\sqrt{x})$

19. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3-2x^2+3}{x\ln x}$

20. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2}$

21. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{2}{x+1}\ln\Big(\frac{x^3+4}{1-x^2}\Big)$

22. $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} (x-2)^2\ln(x^3-8)$

23. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (x\ln x - x\ln(x^2+2))$

24. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x - e^{x^2}}{x^2-x}$

25. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\ln x}$

26. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \Big(\frac{x+1}{x-3}\Big)^x$

Exercice 21. Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = a$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
a) Etudier la fonction $f(x) = x^2 - 2x + 2$.
b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est monotone.
c) Discuter suivant a l'existence et la valeur de $\lim u_n$.

Exercice 22. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par $u_0 = 2$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n}$.
On pose $e_n = u_n - \sqrt{2}$ (n entier $\geqslant 0$).

a. Démontrer qu'on a $u_n > \sqrt{2}$ (n entier $\geqslant 0$).

b. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement décroissante.

c. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

d. Démontrer la relation $e_{n+1} = \dfrac{e_n^2}{2u_n}$.
En déduire que l'on a $e_{n+1} < e_n^2/2$ (n entier $\geqslant 0$).

e. Démontrer qu'on a $0 < e_n < \dfrac{1}{2^{2^n-1}}$ (n entier positif ou nul).

f. Déterminer la limite de la suite $(e_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 23. On définit la suite (u_n) par : $u_0 = a \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

a. Montrer qu'il existe une et une seule valeur de a pour laquelle cette suite est constante. On nomme cette valeur c.

b. En discutant suivant les valeurs de a par rapport à c, montrer que la suite (u_n) est monotone et bornée.

c. Que peut-on déduire des questions précédentes sur l'existence, et, le cas échéant, la valeur de la limite de (u_n) ?

Exercice 24. On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

a. Etudier la fonction $f : x \mapsto 1 + \dfrac{1}{x}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est défini et $\dfrac{3}{2} \leq u_n \leq 2$.

b. Montrer que : $\forall\, n \geq 1 \quad |u_{n+1} - u_n| \leq \dfrac{4}{9}\,|u_n - u_{n-1}|$.

c. Montrer que la fonction $f \circ f$ est croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$; en déduire que les suites $(u_{2p})_{p\geq 0}$ et $(u_{2p+1})_{p\geq 0}$ sont adjacentes ; calculer leur limite commune r.

d. Montrer qu'on a : $\forall\, n \geq 1 \quad |u_{n+1} - r| \leq \dfrac{4}{9}\,|u_n - r|$; quelle valeur suffit-il de donner à l'entier n pour avoir $|u_n - r| \leq \dfrac{1}{1000}$?

Exercice 25.

a. Écrire une relation de récurrence vérifiée par la suite $u_n = \tan n$, $n \geq 0$ (on admet que π est irrationnel).

b. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.