Feuille de TD n° 5

Espaces vectoriels

Exercice 1.
Déterminer lesquels des ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels d'espaces vectoriels connus que l'on précisera.
- $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = 0\}$.
- $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ x + y - z = x + y + z = 0\}$.
- $E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = 1\}$.
- $E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy = 0\}$.
- $E_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = x^2\}$
- $E_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ z(x^2 + y^2) = 0\}$.
- $E_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z \geqslant 0\}$.
- $E_8 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ x^2 + xy + y^2 = 0\}$.
- $E_9 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n\}$.
- $E_{10} = \{P \in \mathbb{R}[X] | deg(P) \leqslant n\}$ où $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.
Décrire tous les sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.
Déterminer si les familles suivantes sont linéairement indépendantes de la manière la plus simple possible :

a. $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 2, 2)$ dans $\mathbb{R}^3$.

b. $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

c. $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (-1, 1, 2)$, $v_3 = (1, -2, 1)$ et $v_4 = (-1, 2, 2)$ dans $\mathbb{R}^3$.

d. $v_1 = (1, 2, 1, 2, 1)$, $v_2 = (2, 1, 2, 1, 2)$, $v_3 = (1, 0, 1, 1, 0)$ et $v_4 = (0, 1, 0, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^5$.

e. $v_1 = (2, 4, 3, -1, -2, 1)$, $v_2 = (1, 1, 2, 1, 3, 1)$ et $v_3 = (0, -1, 0, 3, 6, 2)$ dans $\mathbb{R}^6$.

f. Dans l'espace des suites réelles, (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = r^n$ et $v_n = nr^n$ où $r \in \mathbb{R}^*$.

g. Dans l'espace des polynômes à coefficients réels $\mathbb{R}[X]$, $P_1(x) = 1$, $P_2(x) = x - 2$, $P_3(x) = x^2 + x + 1$ et $P_4(x) = x^3 - 2x^2 + 3$.

h. Dans l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto sin(x)$ et $x \mapsto cos(x)$.

Exercice 4.
Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (4, 1, 4)$ et $v_3 = (2, -1, 4)$.

a. v_1 et v_2 sont-ils colinéaires ? De même avec v_1 et v_3, puis avec v_2 et v_3.

b. La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle linéairement indépendante ?

Exercice 5.
On considère dans $\mathbb{R}^n$ une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants : (e_1, e_2, e_3, e_4). Les familles suivantes sont-elles linéairement indépendantes ?
1) $(e_1, 2e_2, e_3)$, 2) (e_1, e_3), 3) $(e_1, 2e_1 + e_4, e_4)$, 4) $(3e_1 + e_3, e_3, e_2 + e_3)$.

Exercice 6.
On suppose que v_1, v_2, v_3, …, v_n sont des vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^n$.

a. Les vecteurs $v_1 - v_2$, $v_2 - v_3$, $v_3 - v_4$, …, $v_n - v_1$ sont-ils linéairement indépendants ?
b. Les vecteurs v_1, $v_1 + v_2$, $v_1 + v_2 + v_3$, $v_1 + v_2 + v_3 + v_4$, … , $v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ sont-ils linéairement indépendants ?

Exercice 7.
Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on considère :
$v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 3, 4)$, $v_3 = (3, 1, 4, 2)$, $v_4 = (10, 4, 13, 7)$, $v_5 = (1, 7, 8, 14)$.
À quelle(s) condition(s) un vecteur $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ appartient-il au sous-espace $F = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\rangle$? Définir F par une ou des équations.

Soit $u \in F$, que peut-on dire de l'existence et de l'unicité des scalaires x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5 tels que $u = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4 + x_5v_5$.

Exercice 8.
Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs suivants forment-ils une base ? Sinon décrire le sous-espace qu'ils engendrent.

a. $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (3, 0, -1)$, $v_3 = (-1, 1, -1)$
b. $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (3, 0, -1)$, $v_3 = (1, 8, 13)$
c. $v_1 = (1, 2, -3)$, $v_2 = (1, 0, -1)$, $v_3 = (1, 10, -11)$
d. $v_1 = (1, 2, -3)$, $v_2 = (1, 0, -1)$, $v_3 = (1, 10, -11)$

Exercice 9.
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère l'ensemble F des triplets (x, y, z) tels que $x + 2y - z = 0$.

a. F est-il stable par combinaisons linéaires ?
b. Soient $\overrightarrow{u} = (2; -1; 0)$ et $\overrightarrow{v} = (0; 1; 2)$. Montrer que la famille $\{\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}\}$ est libre et qu'elle engendre F.
c. Soit $\overrightarrow{s} = (1; 1; 3)$. Exprimer $\overrightarrow{s}$ en fonction de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
d. Soit G l'ensemble des triplets (x, y, z) tels que $x + 2y - z = 1$. G est-il stable par combinaisons linéaires ?

Exercice 10.
On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$\overrightarrow{u} = (1; -1; 1; -1),\ \overrightarrow{v} = (1; 1; -1; -1) \text{ et } \overrightarrow{w} = (1; -1; -1; 1)$$

a. La famille $\{\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w}\}$ est-elle libre ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?

b. Soit la famille $\mathcal{F} = \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{t}\}$, où $\overrightarrow{t} = (-1; -1; -1; 3)$. $\mathcal{F}$ est-elle une famille libre ? Est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 11.
Comparer les sous-espaces F et G suivants :

a. Dans $\mathbb{R}^3$, $F = \langle(2, 3, -1), (1, -1, -2)\rangle$ et $G = \langle(3, 7, 0), (5, 0, -7)\rangle$

b. Dans $\mathbb{R}^4$, $F = \langle(1, 0, 1, 1), (-1, -2, 3, -1), (-5, -3, 1, -5)\rangle$ et $G = \langle(-1, -1, 1, -1), (4, 1, 2, 4)\rangle$

Exercice 12.
Donner la dimension et une équation des sous-espaces dont une représentation paramétrique est :

1) $\begin{cases} x = 3s - t \\ y = -s - t \\ z = s - t \end{cases}$ (avec s et t dans $\mathbb{R}$) ; 2) $\begin{cases} x = s - t \\ y = -s - t \\ z = 2s - t \end{cases}$ (avec s et t dans $\mathbb{R}$).

Exercice 13.
Soient les vecteurs $e_1 = (1, 2, 3, 4)$, $e_2 = (1, -2, 3, -4)$ de $\mathbb{R}^4$.

a. Peut-on déterminer x et y pour que $(x, 1, y, 1) \in \langle e_1, e_2\rangle$?

b. Idem pour que $(x, 1, 1, y) \in \langle e_1, e_2\rangle$?

Exercice 14.
Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^4$, $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 3, 4)$, $v_3 = (3, 1, 4, 2)$, $v_4 = (10, 4, 13, 7)$, $v_5 = (1, 7, 8, 14)$.
Chercher les relations de dépendance linéaires entre ces vecteurs. Si ces vecteurs sont dépendants, en extraire au moins une famille linéairement indépendante engendrant le même sous-espace.

Exercice 15.
Déterminer le rang des familles suivantes :

a. $(1, 0, 1)$, $(0, 2, 2)$, $(3, 7, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

b. $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

c. $(1, 2, 1, 2, 1)$, $(2, 1, 2, 1, 2)$, $(1, 0, 1, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^5$.

d. $(2, 4, 3, -1, -2, 1)$, $(1, 1, 2, 1, 3, 1)$, $(0, -1, 0, 3, 6, 2)$ dans $\mathbb{R}^6$.

e. $(2, 1, 3, -1, 4, -1)$, $(-1, 1, -2, 2, -3, 3)$, $(1, 5, 0, 4, -1, 7)$ dans $\mathbb{R}^6$.

Indication : on commencera par extraire de la famille une base de l'espace qu'elle engendre.

Exercice 16.
Déterminer selon les valeurs de $t \in \mathbb{R}$, le rang de la famille (u_1, u_2, u_3) où $u_1 = (1, 0, t)$, $u_2 = (1, 1, t)$ et $u_3 = (t, 0, 1)$.

En déduire les valeurs de t pour lesquelles (u_1, u_2, u_3) est libre ? Pour lesquelles $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ est un plan.

Exercice 17.
Déterminer pour quels réels a, b et c, les vecteurs $(1, a, a^2)$, $(1, b, b^2)$ et $(1, c, c^2)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 18.
Déterminer une base des sous-espaces définis par les équations suivantes :

a. Dans $\mathbb{R}^2$, $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$

b. Dans $\mathbb{R}^3$, $2x - 3y + z = 0$

c. Dans $\mathbb{R}^3$, $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$

d. Dans $\mathbb{R}^3$, $\begin{cases} 2y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$

e. Dans $\mathbb{R}^4$, $\begin{cases} x + y + 5t = 0 \\ x + 2y - z + 7t = 0 \\ -x + 3y - 4z + 3t = 0 \end{cases}$

Exercice 19.
On considère les vecteurs $u = (1, 1, 1)$, $v = (-1, 1, 0)$ et $w = (1, 0, -1)$ de $\mathbb{R}^3$.

a. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Calculer les coordonnées des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}_0$ dans $\mathcal{B}$.

c. En déduire les coordonnées du vecteur $u = (a, b, c)$ dans la base $\mathcal{B}$.

d. Comment calculer directement les coordonnées du vecteur $u = (a, b, c)$ dans la base $\mathcal{B}$?

Exercice 20.
Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$, $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$.

a. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la dimension de F et celle de G.

b. Déterminer $F \cap G$.

c. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

d. Montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Exercice 21.
Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - y = 0 \text{ et } z = 0\}$. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 22.
Montrer que

$$H = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Trouver une base de H. Déterminer un supplémentaire de H dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 23.
Vrai ou faux ? On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ avec ($n \geqslant 1$).

a. La famille composée du seul vecteur nul est libre.

b. Si les vecteurs u, v, w sont deux à deux non colinéaires, alors la famille (u, v, w) est linéairement indépendante.

c. Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs. Si aucun n'est une combinaison linéaire des autres, la famille est libre.