Feuille de TD n° 4

Systèmes d'équations linéaires

Exercice 1.
Résoudre, par la méthode de Gauss, les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$\text{a)} \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+y+3z=2 \end{array}\right. ; \ \text{b)} \left\{\begin{array}{r} x+y-z=0 \\ x+5y=3 \\ 2x+y-z=1 \end{array}\right. ; \ \text{c)} \left\{\begin{array}{r} x+2y-z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ x-4y+7z=3 \end{array}\right. ; \ \text{d)} \left\{\begin{array}{r} x+y+3z+2t=-2 \\ 2x+3y+4z+t=-1 \\ 3x+7y+z-6t=\ \ 6 \end{array}\right. .$$

Exercice 2.
Résoudre en utilisant la méthode de Gauss :

$$\text{a)} \left\{\begin{array}{r} x-3y-2z=-1 \\ 2x+y-4z=\ \ 3 \\ x+4y-2z=\ \ 4 \\ 5x+6y-10z=\ 10 \end{array}\right. ; \quad \text{b)} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right).$$

Exercice 3.
En utilisant la méthode de Gauss, discuter et résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants où a est un paramètre réel.

$$\text{a)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 3 & 1 \\ -1 & 3 & a & -1 \\ a & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) ; \quad \text{b)} \left\{\begin{array}{rcrcl} (4a^2)\,x & + & (2a-1)^2\,y & = & (2a+1)^2 \\ (2a+1)\,x & + & (4a-1)\,y & = & 4a^2-1 \end{array}\right. .$$

Vous donnerez les éventuelles solutions multiples sous forme paramétrique puis géométrique.

Exercice 4.
A quelle condition sur les paramètres réels a, b, c, le système suivant admet-il (au moins) une solution dans $\mathbb{R}$? Pour chaque cas, donner l'ensemble des solutions.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & a \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & b \\ 7x_1 & - & 8x_2 & + & 9x_3 & = & c \end{array}\right.$$

.

Exercice 5.
A quelle condition sur les paramètres réels a, b, c, les systèmes suivants admettent-ils (au moins) une solution dans $\mathbb{R}$? Pour chaque cas, donner l'ensemble des solutions.

$$\text{a)} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & a \\ 5x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & = & b \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & c \end{array}\right. ; \quad \text{b)} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & a \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & & = & b \\ -x_1 & - & 5x_2 & - & 2x_3 & = & c \end{array}\right. .$$

Exercice 6.
Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles le système suivant admet des solutions non nulles. Donnez alors les solutions sous forme paramétrique et géométrique.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1+m & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1+m & 0 \end{array}\right)$$

Exercice 7.
Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles le système suivant admet des solutions non nulles. Donnez alors les solutions sous forme paramétrique et géométrique.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} mx & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & (1+m)y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & (2+m)z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 8.
Soit a et b deux réels différents. Montrer que le système linéaire suivant admet une unique solution que l'on calculera.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \dots & + & x_n & = & c_1 \\ bx_1 & + & ax_2 & + & ax_3 & + & \dots & + & ax_n & = & c_2 \\ bx_1 & + & bx_2 & + & ax_3 & + & \dots & + & ax_n & = & c_3 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ bx_1 & + & bx_2 & + & bx_3 & + & \dots & + & ax_n & = & c_n \end{array}\right.$$

Exercice de recherche

Exercice 9. ***P***roblème des bœufs de Newton
Mettre en équation et résoudre le problème suivant, posé par Newton (1642-1727).
Sachant que 75 bœufs ont brouté en douze jours l'herbe d'un pré de 60 ares, et que 81 bœufs ont brouté en quinze jours l'herbe d'un pré de 72 ares, on demande combien il faudra de bœufs pour brouter en dix-huit jours l'herbe d'un pré de 96 ares. On suppose que dans les trois prés, l'herbe est à la même hauteur au moment de l'entrée des boeufs, et qu'elle continue de croitre uniformément depuis leur entrée.