# Feuille de TD n° 3

## Fonctions polynômes

**Exercice 1.**
Effectuer la division de $A \in \mathbb{C}[X]$ par $B \in \mathbb{C}[X]$ dans les cas suivants :

a. $A(x) = x^3 - 1, \quad B(x) = x + 2$ ;
b. $A(x) = x^4 + ix^3 - ix^2 + x + 1, \quad B(x) = x^2 + ix + 1$ ;
c. $A(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2, \quad B(x) = x^2 + (1 - i)x + 1 + i$.

**Exercice 2.**
Les fonctions polynômes $A(x) = x^5 + x^4 + x - 2$ et $B(x) = x^3 - x + 1$ ont-ils une racine commune ?

**Exercice 3.**
Montrer que la fonction polynôme $x(x+1)(2x+1)$ divise $A(x) = (x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$.

**Exercice 4.**
Sans effectuer la division, déterminer le reste de la division de :

$$A(x) = (\cos a + x \sin a)^n \quad \text{par} \quad B(x) = x^2 + 1.$$

**Exercice 5.**
Trouver toutes les fonctions polynômes de degré $\leqslant 3$ telles que

$$P(0) = 1,\ P(1) = 2,\ P(2) = -1,\ P(3) = -2.$$

**Exercice 6.**
Soit $P(x) = x^2 + ax + b$ une fonction polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré 2 et unitaire. Si $\alpha$ et $\beta$ sont les racines de $P$, montrer que l'on a $\alpha + \beta = -a$, $\alpha\beta = b$.

**Exercice 7.**
Déterminer toutes les fonctions polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3 telles que

$$P(x + 1) - P(x - 1) = x^2 + 1.$$

**Exercice 8.**

a. Déterminer toutes les fonctions polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ telles que $P(x^2) = (x^2 + 1)P(x)$.
b. Déterminer toutes les fonctions polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ telles que $P'(x)^2 = 4P(x)$.

**Exercice 9.**
Soit $P$ une fonction polynôme à coefficients réels. En notant $R$ le reste de la division euclidienne de $P$ par $x^2 + 1$, montrer que $R(i) = P(i)$. En déduire que $x^2 + 1$ divise $P$ si et seulement si $P(i) = 0$.
Montrer ce même résultat sans passer par le reste de la division enclidienne.

**Exercice 10.**
Déterminer $a$ et $b$ pour que
$$P(x) = ax^{n+1} + bx^n + 1$$
admette la racine double $x = 1$. Quel est alors le quotient de $P(x)$ par $(x-1)^2$ ?

**Exercice 11.**
Soit $n$ un entier tel que $n \geq 2$. Soit la fonction polynôme $P(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} ... + \dfrac{x^n}{n!}$.

a. Calculer $P(x) - P'(x)$.
b. Montrer que toutes les racines complexes de $P$ sont simples.

**Exercice 12.**
Quels sont les fonctions polynômes $P$ de $\mathbb{C}[X]$ telles que $P'$ divise $P$ ?

**Exercice 13.**
Factoriser $A(x) = x^5 + x$ dans $\mathbb{C}[X]$. (Il y a deux manières de faire.)

**Exercice 14.**
Trouver la décomposition de $A(x) = x^6 + 1$ en produit de polynômes irréductibles et unitaires de $\mathbb{R}[X]$.

**Exercice 15.**
Soit la fonction polynôme
$$P(x) = x^4 + (-4+2i)x^3 + (12-8i)x^2 + (4+26i)x - 13$$

a. Montrer que $-i$ est une racine de $P$. Préciser son ordre de multiplicité.
b. Calculer les racines de $P$.

**Exercice 16.**
Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ la fonction polynôme
$$P(x) = x^5 + 8x^4 + 26x^3 + 44x^2 + 40x + 16$$
après avoir vérifié qu'elle admet $-2$ pour racine.

**Exercice 17.**
Factoriser $A(x) = x^4 - 2x^3 - x + 2$ dans $\mathbb{R}[X]$ de deux manières :

a. en remarquant que 2 est racine, puis en factorisant d'abord dans $\mathbb{C}[X]$ ;
b. sans passer par $\mathbb{C}$.

**Exercice 18.**
Soit $n$ un entier strictement positif. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ la fonction polynôme
$$P(x) = (x+1)^n - (x-1)^n.$$

**Exercice 19.**
Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme

$$P(x) = x^4 - 2x^2 \cos\phi + 1$$

où $\phi$ est un réel donné.

**Exercice 20.**
Montrer que toute fonction polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré 3 admet une racine réelle :

a. en passant par $\mathbb{C}[X]$ ;

b. sans passer par $\mathbb{C}[X]$.

Est-ce que toute fonction polynôme de degré 4 et plus admet une racine réelle ?

**Exercice 21.**
Soit $P$ une fonction polynôme non constant et $m \geq 1$. On suppose que $a$ est racine de $P$ de multiplicité exactement $m$.
Montrer que $a$ est racine de $P'$ de multiplicité exactement $m-1$.

**Exercice 22.**
Soit $P$ une fonction polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré non nul. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies ? Pour celles qui sont vraies, justifier ; pour celles qui sont fausses, donner un contre-exemple.

a. Si $P$ est de degré impair, alors $P$ admet une racine réelle.

b. Si $P$ admet une racine réelle, alors $P'$ admet une racine réelle.

c. Si $P$ admet deux racines réelles, alors $P'$ admet une racine réelle.

d. Si toutes les racines de $P'$ sont simples, alors toutes les racines $P$ sont simples.

e. Si toutes les racines de $P$ sont simples, alors toutes les racines de $P'$ sont simples.