Feuille de TD n$^{\text{o}}$ 2

Ensembles et applications

Exercice 1

Soit E un ensemble de nombres. On considère les énoncés mathématiques suivants :

$$\exists x \in E : \forall y \in E,\ x + y = y, \qquad (\mathcal{E})$$
$$\forall x \in E,\ \exists y \in E : x + y = 0. \qquad (\mathcal{E}')$$

a. L'énoncé (**??**) est-il vrai quand :
   - E est l'ensemble des entiers pairs ?
   - E est l'ensemble des entiers impairs ?

b. L'énoncé (**??**) est-il vrai quand :
   - E est l'ensemble des entiers naturels ?
   - E est l'ensemble des entiers relatifs ?

Exercice 2

On se donne les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$:

$$A_1 \coloneqq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y - x^2 + 1 \geq 0\right\},$$
$$A_2 \coloneqq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y + x^2 - 1 \geq 0\right\},$$
$$B_1 \coloneqq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y - 2x + 1 \geq 0\right\},$$
$$B_2 \coloneqq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y + 2x + 1 \geq 0\right\},$$
$$B_3 \coloneqq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \leq x^2\right\},$$

ainsi que quatre réels a, b, c et d tels que $a < b$ et $c < d$. Faire un dessin représentant les ensembles suivants :
- $E_1 \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy = 0\}$;
- $E_2 \coloneqq A_1 \cup A_2$;
- $E_3 \coloneqq B_1 \cap B_2 \cap B_3$;
- $E_4 \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x| \leq 1\} \times \mathbb{R}$;
- $E_5 \coloneqq [a,b] \times [c,d]$.

Exercice 3

Soient A et B deux parties de $\mathbb{N}$.

a. Décrire $A \cap B$ lorsque :
   - A est l'ensemble des multiples de 2 et B l'ensemble des multiples de 3 ;
   - A est l'ensemble des diviseurs de 45 et B l'ensemble des diviseurs de 55.

b. Décrire $A \cup B$ lorsque :
 – A est l'ensemble des multiples de 2 et B l'ensemble des multiples de 4 ;
 – A est l'ensemble des diviseurs de 12 et B l'ensemble des diviseurs de 21.

Exercice 4

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Montrer que, pour toutes parties A et B de E, on a :

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B), \qquad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

Donner un exemple pour lequel la dernière inclusion est stricte. Que dire si f est injective ?

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) := x - y^2.$$

a. L'application f est-elle injective ?

b. Montrer que f est surjective.

Exercice 6

Montrer que l'application $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(m,n) \mapsto 2^m(2n+1)$ est bijective.

Exercice 7

On considère l'application suivante :

$$f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x + \dfrac{1}{x} \end{pmatrix}.$$

a. f est-elle injective ? f est-elle surjective ?

b. Déterminer des intervalles $I \subset \mathbb{R}_+^*$ et $J \subset \mathbb{R}^+$ tels que la restriction de f à I soit une bijection de I sur J.

Exercice 8

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications telles que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

a. Montrer que g est surjective. En supposant, de plus, que f est surjective, montrer que g est injective.

b. Montrer que f est injective. En supposant, de plus, que g est injective, montrer que f est surjective.

Exercice 9

Soit E un ensemble non vide. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

a. Montrer qu'il existe une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$.

b. Soit $f : E \to \mathcal{P}(E)$ une application. On considère le sous-ensemble suivant de E :

$$A \coloneqq \{x \in E \mid x \notin f(x)\}.$$

Montrer qu'il n'existe pas d'élément a de E tel que $A = f(a)$. En déduire qu'il n'existe pas d'application surjective de E dans $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 10

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x - y, -2x + 2y)$.

a. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $(a, b) \in f(\mathbb{R}^2)$ si, et seulement si, $2a + b = 0$.

b. Que dire de l'injectivité et de la surjectivité de l'application f ?

Exercice 11

Montrer par récurrence la proposition suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n < 2^n.$$

Exercice 12

Soit $x \in \mathbb{C}$. On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n &\coloneqq \sum_{k=1}^{n} k, & b_n &\coloneqq \sum_{k=1}^{n} k^2, \\ c_n &\coloneqq \sum_{k=1}^{n} k^3, & d_n &\coloneqq \sum_{k=0}^{n} k(k+1), \\ e_n &\coloneqq \sum_{k=0}^{n} x^k, & f_n &\coloneqq \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}. \end{aligned}$$

Montrer que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n &= \frac{n(n+1)}{2}, & b_n &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \\ c_n &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}, & e_n &= \begin{cases} n+1 & \text{si } x = 1, \\ \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} & \text{si } x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}. \end{cases} \end{aligned}$$

En déduire une expression simple des termes des suites $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 13 (Formule du binôme de NEWTON)

a. Montrer que, pour tous complexes x et y et tout entier naturel n :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}.$$

b. En déduire, pour tout entier n, des expressions simples des sommes suivantes :

$$S_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} C_n^k, \qquad T_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} k C_n^k.$$

Exercice 14

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose :

$$A_n \coloneqq \left\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \,|\, x + 2y = n\right\}.$$

Calculer le cardinal de l'ensemble A_n.

Exercice 15

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$. On note F l'ensemble des applications de E dans $\{0,1\}$.

a. Montrer que F est fini et calculer son cardinal.

b. Pour toute partie A de E, on pose :

$$\chi_A : \left(\begin{array}{c} E \to \{0,1\} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array} \right).$$

χ_A est appelée *fonction caractéristique* de A et est clairement élément de F. On considère alors l'application $\phi : \mathcal{P}(E) \to F, A \mapsto \chi_A$. Montrer que ϕ est injective. En déduire sa bijectivité.