Feuille de TD n° 1

Nombres Complexes

Exercice 1.
Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad z_2 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad z_3 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

Exercice 2.
Soit z un nombre complexe tel que $|z| = 1$ et $z \neq 1$. Montrer que $\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$.

Exercice 3.

a. Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 3+3i \quad ; \quad z_2 = -1-\sqrt{3}i \quad ; \quad z_3 = -\frac{4}{3}i \quad ; \quad z_4 = -2 \quad ; \quad z_5 = e^{i\theta} + e^{i\theta'}.$$

b. Calculer $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2000}$.

Exercice 4.
Calculer les racines carrées de 1, i, $3+4i$, $8-6i$, et $7+24i$.

Exercice 5.
On note : $z_1 = -2+2i\sqrt{3}$, $z_2 = 5-12i$ et $z_3 = \frac{1+i}{1-i}$.

Ecrire sous forme algébrique les racines carrées des nombres complexes z_1, z_2, $z_1 z_2$ et z_3

Exercice 6.

a. Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.

b. Calculer les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 7.
Montrer que les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b, c réels, sont réelles ou conjuguées.

Exercice 8.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$(E1)$ $z^2 + z + 1 = 0;$ $(E2)$ $z^2 - (1+2i)z + i - 1 = 0;$

$(E3)$ $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0;$ $(E4)$ $z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i = 0;$

$(E5)$ $4z^2 - 2z + 1 = 0;$ $(E6)$ $z^4 + 2z^2 + 4 = 0.$

Exercice 9.

a. Donner les racines cinquièmes de $\frac{1+i}{1-i}$.

b. Sachant que $(2+4i)^6 = 7488 + 2816i$, donner les racines sixièmes de $7488 + 2816i$.

Exercice 10.

a. Calculer les racines n-ièmes de $-i$ et de $1+i$.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\quad z^2 - z + 1 - i = 0$.

c. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\quad z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$.

Exercice 11.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes où $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(\frac{z-1}{z}\right)^n = 1 \quad ; \quad (z+1)^n = (z-1)^n \quad ; \quad z^n = \overline{z}$$

Exercice 12.
Soit $n \geq 1$ un entier et $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$.

Calculer les quantités $\displaystyle\sum_{z \in U_n} z$ et $\displaystyle\prod_{z \in U_n} z$.

Exercice 13.
Soit u une racine n-ième de l'unité, calculer

$$S = 1 + 2\,u + 3\,u^2 + \cdots + n\,u^{n-1}$$

Exercice 14.
Soit a un nombre réel. Calculer $\cos(5a)$ et $\sin(5a)$ en fonction de $\cos a$ et de $\sin a$.

Montrer que $\cos\dfrac{\pi}{10} = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

Exercice 15.
Soit a un nombre réel. Linéariser $\cos^4 a$ puis $\cos^2 a \sin^3 a$ et enfin $\sin^5 a$.

Exercice 16.
Pour n entier naturel et θ réel, on pose

$$C_n(\theta) := \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad S_n(\theta) := \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta).$$

a. Calculer $C_n(\theta) + iS_n(\theta)$. En déduire $C_n(\theta)$ et $S_n(\theta)$ en fonction de n et θ.

b. Calculer de même les sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k \cos(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k \sin(k\theta)$, où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 17.
Représenter dans le plan complexe les ensembles E, F, G, H des points dont l'affixe z vérifie respectivement :
(E) $|z-1| = 1$ (F) $|z+i-3| \leq 2$ (G) $|z-i| = |z+1|$ (H) $z + \bar{z} = z\bar{z}$.

Exercice 18.
Déterminer par le calcul et géométriquement les nombres complexes z tels que $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = k$ où k est un réel tel que $k > 0$ et $k \neq 1$.
Généraliser pour $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = k$ avec a et b réels quelconques.

Exercice 19.

a. Soit A un point du plan complexe d'affixe $\alpha = a + ib$. Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $|z|^2 = \alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z$.

b. Quelles conditions doivent vérifier les points M_1 et M_2 d'affixes z_1 et z_2 pour que $\dfrac{z_1}{z_2}$ soit réel ?

c. Déterminer les nombres complexes z tels que les points du plan complexe d'affixes z, iz, i sont alignés.

d. Déterminer les nombres complexes z tels que les points du plan complexe d'affixes z, iz, i forment un triangle équilatéral.

e. Soit $z = a+ib$, mettre l'expression $\frac{z-1}{z+1}$ sous forme $A+iB$ puis déterminer l'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que $\arg\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

Exercices de recherche

Exercice 20.
Pour n entier naturel et θ réel, on pose

$$A_n(\theta) := \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad B_n(\theta) := \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(k\theta).$$

Calculer $A_n(\theta)$ et $B_n(\theta)$ en fonction de n et de θ.
Indication : il faut savoir écrire $1 + e^{i\theta}$ sous la forme ae^{ib} avec a et b réels.

En déduire les formules

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n \quad (n \geq 0) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0 \quad (n \geq 1).$$

Exercice 21. ***Comment construire un pentagone régulier ?***
Soit $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ un pentagone régulier de centre O tel que $\overrightarrow{OA_0}$ a pour affixe 1 et dont les sommets sont numérotés dans le sens trigonométrique (i.e. direct).

a. Donner les affixes $\omega_0, \ldots, \omega_4$ des points $A_0, \ldots, A_4$. Montrer que $\omega_k = {\omega_1}^k$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ puis que $1 + \omega_1 + \omega_1^2 + \omega_1^3 + \omega_1^4 = 0$.

b. En déduire que $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est l'une des solutions de l'équation $4z^2 + 2z - 1 = 0$. En déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

c. On considère le point B d'affixe -1. Calculer la longueur BA_2 en fonction de $\sin \frac{\pi}{10}$ puis de $\sqrt{5}$ (on remarquera que $\sin \frac{\pi}{10} = \cos \frac{2\pi}{5}$).

d. On considère le point I d'affixe $\frac{i}{2}$, le cercle $\mathcal{C}$ de centre I de rayon $\frac{1}{2}$ et enfin le point J d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la demi-droite $[BI)$. Calculer la longueur BI puis la longueur BJ.

e. **Application :** Dessiner un pentagone régulier à la règle et au compas. Expliquer.