Université Paris 7 MT1 MM1
L1, Sciences exactes 2010-2011

SECTION B et D (Cours : B. Gentou)

Examen du 7 janvier 2011

Durée : 3 heures. Sans document, ni calculette, téléphones mobiles éteints et rangés.

Exercice 1.
Déterminer sous forme polaire, puis sous forme algébrique, tous les nombres complexes z tels que :

$$z^3 = 8i$$

Exercice 2.
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y - 4z = 0\}$.

1. Rappeler les propriétés qu'une partie P de $\mathbb{R}^3$ doit satisfaire pour être un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Vérifier que la partie F est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ en montrant qu'elle satisfait ces propriétés.
2. Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ de F ; en déduire la dimension de F.

Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par la famille de vecteurs (v_1, v_2, v_3) où $v_1 = (1, 6, 1)$, $v_2 = (1, 3, -5)$ et $v_3 = (2, 7, -8)$.

3. Justifier *sans aucun calcul* que la dimension de G vérifie : $\dim G \geqslant 2$.
4. Démontrer que la famille (v_1, v_2, v_3) n'est pas libre. *Sans aucun calcul supplémentaire*, extraire de cette famille une base $\mathcal{B}_2$ de G, en justifiant soigneusement qu'il s'agit bien d'une base de G. Préciser la dimension de G.
5. Montrer que G est défini par l'équation $11x - 2y + z = 0$. (Autrement dit, montrer que les vecteurs de G sont exactement les vecteurs $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $11x - 2y + z = 0$.)
6. Déterminer une base $\mathcal{B}_3$ du sous-espace vectoriel $F \cap G$; en déduire la dimension de $F \cap G$.
7. Soit $\mathcal{E}$ la famille de vecteurs obtenue en réunissant $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_3$. Déterminer sans calculs supplémentaires si $\mathcal{E}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.

a) Donner la définition exacte (à l'aide d'un réel $\varepsilon > 0$) de la formule : $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, où $l \in \mathbb{R}$.

b) Déterminer les limites suivantes en justifiant les résultats :

1. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 8}$
2. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \left(\sqrt{1 + x + x^2} - 1 \right)$
3. $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{x + 2}{x^2 \ln x}$ ·

c) Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par :

$$\left[\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(x) = x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \quad \text{pour tout } x \neq 0. \end{array} \right.$$

Exercice 4.

1. Rappeler l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires.
2. Rappeler l'énoncé du théorème définissant l'image d'un segment $[a, b]$ $(a < b)$ par une application continue.
3. Existe-t-il une application $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et telle que $f([0, +\infty[) = [-1, 0] \cup [1, +\infty[$?
4. Existe-t-il une application $f : [0, 1] \to [0, +\infty[$ continue et surjective ?

Exercice 5.
On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $g(x) = e^x + e^{-x} + 2$.

1. Préciser en justifiant la réponse si g est paire ou impaire.
2. Étudier les variations de g.

On note f la restriction de g à l'ensemble de départ $[0, +\infty[$.

3. Montrer que l'application f est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[4, +\infty[$ et que l'application réciproque $f^{-1} : [4, +\infty[\to [0, +\infty[$ est continue.
4. Montrer que l'application f^{-1} est dérivable sur $]4, +\infty[$. Est-elle dérivable en 4 ?
5. Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$: $f'(x) = \sqrt{f(x)\big(f(x) - 4\big)}$.
6. En déduire que la dérivée $(f^{-1})'$ de f^{-1} vérifie pour tout $y > 4$:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\sqrt{y(y-4)}}$$

Exercice 6.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\left[\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \,. \end{array}\right.$$

On note $I = [0, \frac{1}{2}]$.

1. Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est définie et appartient à I.
2. Montrer que si la suite (u_n) converge alors sa limite appartient à I et est solution de l'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$.
3. Déterminer l'unique solution dans l'intervalle I de l'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$.
   On note α ce nombre.
4. Montrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que

   $$\text{pour tous } x \text{ et } y \text{ dans } I,\ |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}\,|x - y|$$

5. Déduire des questions précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$.
6. Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
7. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α.
8. Comment obtenir, à l'aide des résultats précédents, une approximation de α par un nombre rationnel avec une erreur inférieure à 10^{-3} ?