Université Paris Diderot | MM1
L1 - Sciences Exactes | 2010-2011

Devoir Maison à rendre le 14 décembre 2010

Exercice 1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(4 - u_n^2)$

1. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{3}(4 - x^2)$. Etudier les variations de f et tracer $\mathcal{C}_f$ et la droite $y = x$ dans un même repère (échelle 4 cm pour une unité). Construire dans ce graphe les points u_i pour $0 \leqslant i \leqslant 6$.
2. Montrer que $f\left(\left[0, \dfrac{4}{3}\right]\right) \subset \left[0, \dfrac{4}{3}\right]$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \in \left[0, \dfrac{4}{3}\right]$. Nous allons montrer que la suite (u_n) tend vers 1.
3. (i) Après avoir rappeler le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{8}{9}|u_n - 1|$$

(ii) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 1| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{8}{9}\right)^{n+1}$.

(iii) Conclure. A partir de quel rang a-t-on $|u_{n+1} - 1| \leqslant 10^{-5}$?

Exercice 2 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (1, m, m + 2)$, $v = (m, -m, m)$ et $w = (2, -m - 2, -m)$ où m est un paramètre réel. On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs u, v et w.

1. Pour quelles valeurs de m la famille de vecteurs (u, v, w) est-elle liée ?
2. Soit G le sous-espace vectoriel engendré par u et v. Déterminer, selon les valeurs de m, une base et la dimension de G.
3. Donner, selon les valeurs de m, une base et la dimension de F

Exercice 3 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 4x$.

1. Etudier les variations de f.
2. Déterminer les intervalles maximaux sur lesquels f est injective.
3. On note g la restriction de f à celui des intervalles précédents qui est de la forme $[a, +\infty[$. Montrer que g est une bijection vers un intervalle I que l'on précisera.
4. On note $h : I \to \mathbb{R}$ la réciproque de g. Quelles sont les propriétés de h que l'on peut déduire des théorèmes du cours ?
5. Déterminer la valeur de la dérivée de h en 8.

Exercice 4 Un randonneur parcourt 20 km en 5 heures. On souhaite montrer qu'il existe un intervalle d'une heure pendant lequel il a fait exactement 4 km. Pour cela, on considère la fonction continue $t \in [0,5] \mapsto f(t) \in [0,20]$, qui associe au temps t la distance parcourue par le randonneur.

1. On considère la fonction auxiliaire $g : [0,4] \to \mathbb{R}, t \mapsto f(t+1) - f(t) - 4$. Calculer $g(0) + g(1) + \ldots + g(4)$. En déduire qu'il existe des entiers $0 \leqslant i < j \leqslant 4$ tels que $g(i)g(j) \leqslant 0$.
2. Conclure.

Exercice 5 Déterminer les limites suivantes en justifiant les résultats :

1. $\underset{x\to -2}{lim} \dfrac{x^3 + 3x^2 + x - 2}{x^2 + 6x + 8}$
2. $\underset{x\to 0^+}{lim} (xln(x) - xln(x^2 + 2))$
3. $\underset{x\to +\infty}{lim} x^2(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}})$

Exercice 6 (facultatif) On considère les polynômes

$$P(x) = x^6 + (i-1)x^5 + (-2+i)x^4 + (i-1)x^2 - 2ix + 1 - 3i \text{ et } Q(x) = x^4 + i - 1$$

1. Effectuer la division euclidienne de P par Q.
2. Mettre le nombre complexe $1 - i$ sous forme trigonométrique, puis déterminer les racines de $Q(x)$ dans $\mathbb{C}$.
3. En déduire les racines de $P(x)$.
4. Factoriser le polynôme $P(x)$ dans $\mathbb{C}[X]$.