Université de Reims Champagne Ardenne
UFR Sciences Exactes et Naturelles

Année universitaire 2013-2014
MA 0804 - Master 1

TD3

Couple de variables aléatoires, indépendance

Couples de variables aléatoires discrètes

Exercice 1 Soit un couple (X, Y) de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par

$Y \backslash X$	a_1	a_2	a_3
b_1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
b_2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	α

,

avec $a_i \neq a_j$ et $b_i \neq b_j$ si $i \neq j$.

1. Que vaut α ? Déterminer les lois de X et de Y (lois “marginales”).
2. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Que remarque-t-on si $2a_1 = a_2 + a_3$?
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 On jette un dé équilibré et on considère les v.a. suivantes:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si le résultat est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad Y = \begin{cases} 1 & \text{si le résultat est pair} \\ -1 & \text{si le chiffre obtenu est 3} \\ 2 & \text{si le chiffre obtenu est 1 ou 5} \end{cases}$$

1. Donner la loi du couple (X, Y) et en déduire les lois respectives de X et Y.
2. Montrer que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 3 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p ($p \in]0, 1[$).

1. Quelle sont les lois des v.a. $S = X + Y$ et de $D = X - Y$?
2. Ces v.a. $X + Y$ et $X - Y$ peuvent-elles être indépendantes?
3. Donner la loi du couple (S, D) et retrouver les résultats de 1.
4. Calculer $\mathrm{E}(S)$, $\mathrm{E}(D)$ et $\mathrm{Cov}(S, D)$.

Exercice 4
On lance un nombre aléatoire de fois N une pièce de monnaie pour laquelle $P(pile) = p$, où $0 < p < 1$. On suppose que la loi de N est une loi de Poisson $\mathcal{P}(\alpha)$. On note P le nombre de piles obtenu, et F le nombres de faces.

1. Donner la loi du couple (P, N). En déduire la loi de P, puis celle de F.
2. Montrer que ces deux variables aléatoires P et F sont indépendantes.

Exercice 5
On tire sans remise n boules dans une urne qui contient a boules blanches et b boules noires (avec $1 \leq n \leq a+b$). On suppose les boules blanches numérotées, et on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la i-ème boule blanche a été tirée, et 0 sinon. Notons $X = X_1 + \cdots + X_a$ le nombre de boules blanches tirées.

1. Calculer l'espérance de X_i pour tout i. En déduire l'espérance de X.
2. Justifier que $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ est indépendante de (i, j), et déterminer la matrice de covariance. En déduire $\mathrm{Var}(X)$.

Couple de variables aléatoires réelles

Exercice 6
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose que X est distribuée suivant la loi de Poisson de moyenne $E(X) = 2$ et que Y est distribuée suivant la loi uniforme sur [0,1]. On pose $Z = X + Y$.

1. Pour tout entier $n \geq 0$, et pour $n < x \leq n+1$, calculer la probabilité $P[n \leq Z < x]$.
2. Calculer la fonction de répartition de Z. Montrer que la loi de probabilité de Z admet une densité de probabilité que l'on déterminera. Indiquer la courbe représentative de cette densité en repère orthonormé.
3. Quelles sont les valeurs de la moyenne et de l'écart–type de Z ?

Exercice 7
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} ke^x & \text{si } 0 \leq y \leq -x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer la valeur de la constante k pour que f soit la densité de probabilité d'un couple de variables aléatoires (X,Y).
2. Calculer les probabilités $P[X > x, Y < y]$ pour :
   (a) $x \leq -y \leq 0$
   (b) $0 \leq -x \leq y$
3. En déduire, puis retrouver directement les lois marginales de X et Y.
4. Soit $\mathcal{D}$ le domaine de $\mathbf{R}^2$ défini par :
   $$\mathcal{D} = \{ \ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \ / \quad 0 \leq y \leq -x \leq y+1 \ \}$$
   Calculer la probabilité : $P[(X,Y) \in \mathcal{D}]$.
5. Calculer la densité du couple $(X+Y, Y)$.
   (a) Les variables aléatoires $X+Y$ et Y sont–elles indépendantes ?
   (b) Quelles sont leurs lois respectives ?
   (c) Calculer la probabilité $P[X+Y \geq -1]$.

Exercice 8
Soit f la fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} Ce^{-(x+y)} & \text{si } y > x^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que pour une valeur de la constante C que l'on déterminera, cette fonction est la densité de probabilité d'un couple de variables aléatoires réelles (X,Y).
2. Montrer que le couple $(\frac{X}{Y}, Y)$ admet une densité de probabilité que l'on déterminera. En déduire la densité de probabilité de la variable aléatoire réelle $\frac{X}{Y}$.

Exercice 9
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, X admettant la densité de probabilité :

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

et Y étant uniformément distribuée sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$. En utilisant le produit de convolution, calculer la densité de la variable aléatoire $Z = X - Y$.