Un problème de Capes blanc

Préambule

Dans tout le sujet, n désigne un entier fixé $\geqslant 2$.

On utilise les notations et observations suivantes.

- $[[n]]$ désigne l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.
- M désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
- $\mathrm{Sp}(A)$ désigne l'ensemble des valeurs propres (réelles ou complexes) de A dans M.
- C désigne l'espace vectoriel des matrices unicolonnes à n lignes à coefficients réels.
- L désigne l'espace vectoriel des matrices unilignes à n colonnes à coefficients réels.
- I désigne la matrice identité d'ordre n. Les colonnes de I, notées $(E_i)_{i\in[[n]]}$, forment la base canonique de C et ses lignes $(E_i^t)_{i\in[[n]]}$ forment la base canonique de L.
- Pour A dans M, φ_A désigne l'application $\varphi_A : C \to C$, $X \mapsto AX$ qui est linéaire de matrice A par rapport à la base canonique de C.
- Pour A dans M, ψ_A désigne l'application $\psi_M : L \to L$, $X \mapsto XA$ qui est linéaire de matrice A^t par rapport à la base canonique de L.
- U désigne le vecteur colonne $U = (1, \ldots, 1)^t$, c'est-à-dire l'élément de C dont toutes les composantes sont égales à 1.
- Pour toute matrice $A = (a_{i,j})$ (carrée ou rectangulaire), $A \geqslant 0$ désigne le fait que $a_{i,j} \geqslant 0$ pour tous i et j, et $\|A\|$ désigne le nombre $\max |a_{i,j}|$, qui est le maximum de la valeur absolue des coefficients de A.
- Un vecteur ligne $V = (v_1, \ldots, v_n)$ dans L est dit stochastique si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ et si $v_i \geqslant 0$ pour tout i dans $[[n]]$.
- Les espaces vectoriels M, C et L sont considérés comme des espaces normés pour la norme $\|\cdot\|$.

- On note $M^+ = \{A \in M \,|\, A \geqslant 0\}$, $C^+ = \{X \in C \,|\, X \geqslant 0\}$ et $L^+ = \{X \in L \,|\, X \geqslant 0\}$.

Nota La partie IV et le début de la partie V sont indépendants de la partie III.

I Matrices stochastiques

Soit S l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j})$ de M vérifiant les conditions suivantes :

(1) $A \geqslant 0$.

(2) Pour tout i dans $[[n]]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

On appelle matrices stochastiques les éléments de S.

1. Soit A dans M. On considère les propriétés suivantes :

(1') $\varphi_A(C^+) \subset C^+$. (1") $\psi_A(L^+) \subset L^+$. (2') $\varphi_A(U) = AU = U$.

Montrer les équivalences : (1) si et seulement si (1') si et seulement si (1").

Montrer l'équivalence : (2) si et seulement si (2').

2. Montrer que pour toutes matrices A et B de S et tout réel t dans $[0, 1]$, la matrice $tA + (1 - t)B$ est dans S (c'est-à-dire que S est une partie convexe de M).

3. Montrer que pour toute suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices de S convergeant vers B dans M, la matrice B est dans S (c'est-à-dire que S est une partie fermée de M). Montrer que la partie S est compacte.

4. Soit $V = (v_1, \ldots, v_n)$ un vecteur ligne stochastique. Montrer que pour toute matrice A de S, le vecteur ligne VA est stochastique.

5. Montrer que S est une partie de M, stable pour la multiplication matricielle.

6.a. Soit A dans S telle que $AA^t = I$. Montrer que chaque ligne et chaque colonne de A a tous ses coefficients nuls sauf un qui vaut 1. Préciser l'action de φ_A sur la base canonique (E_i) de C.

6.b. Que peut-on dire de $G = \{A \in S \,|\, AA^t = I\}$?

II Éléments propres des matrices stochastiques

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de S.

1. Montrer que 1 est valeur propre de A.

2. Montrer que $\mathrm{Sp}(A)$ est inclus dans $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leqslant 1\}$.

[Pour traiter cette question, il pourra être utile de considérer pour λ dans $\mathrm{Sp}(A)$, un vecteur colonne $Y = (y_1, \dots, y_n)^t \neq 0$ tel que $AY = \lambda Y$ et $\mu = \max\{|y_i|, i \in [[n]]\}$.]

3. Soit λ un élément de $\mathrm{Sp}(A)$. Justifier le fait qu'il existe un élément p de $[[n]]$ tel que $|\lambda - a_{p,p}| \leqslant 1 - a_{p,p}$.

4. On suppose ici que $a_{i,i} > 1/2$ pour tout i dans $[[n]]$. Montrer que A est inversible.

5. On suppose ici que $a_{i,i} > 0$ pour tout i dans $[[n]]$.

5.a. Montrer qu'il existe un réel α dans $]0, 1]$ tel que $\mathrm{Sp}(A)$ est inclus dans l'ensemble $D_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \alpha| \leqslant 1 - \alpha\}$.

Interpréter géométriquement le résultat précédent et faire la figure correspondante.

5.b. Que peut-on dire du module des valeurs propres de A différentes de 1 ?

6. On suppose ici que $a_{i,j} > 0$ pour tous i et j dans $[[n]]$. Montrer que les valeurs propres (complexes) de A autres que 1, sont de module strictement inférieur à 1, et préciser le rang de la matrice $A - I$.

7. Soit λ dans $\mathrm{Sp}(A)$ avec $|\lambda| = 1$.

7.a. Soit Y un vecteur colonne $Y = (y_1, \dots, y_n)^t \neq 0$ tel que $AY = \lambda Y$. On note

$$\mu = \max\{|y_i| \mid i \in [[n]]\}, \qquad K = \{k \in [[n]] \mid |y_k| = \mu\}.$$

Construire une application f de K dans K telle que pour tout $k \in K$, $y_{f(k)} = \lambda y_k$.

7.b. En déduire qu'il existe un entier p compris entre 1 et n tel que $\lambda^p = 1$.

III Convergence

Soit A dans S. On s'intéresse dans cette partie à la convergence éventuelle de la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Pour tout k dans $\mathbb{N}$, on note $a_{i,j}^{(k)}$ le coefficient d'indice (i, j) de A^k pour tous i et j dans $[[n]]$.

1. La suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ peut-elle converger si A possède une valeur propre λ de module 1 et différente de 1 ?

2. On suppose que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers B dans M.

2.a. Montrer que B appartient à S et $B^2 = B$.

2.b. Montrer qu'on a aussi $BA = AB = B$. Ces égalités traduisent des propriétés remarquables des colonnes et des lignes de B, lesquelles ?

2.c. Lorsque $n = 2$, donner toutes les possibilités de matrices B.

3. On suppose ici que A est diagonalisable dans l'espace des matrices à coefficients complexes et qu'elle ne possède pas de valeur propre de module 1 autre que 1. Montrer que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

4. Soit $\varepsilon = \min\{a_{i,j} \mid i, j \in [[n]]\}$. On suppose ici que $\varepsilon > 0$. Pour tout k dans $\mathbb{N}$, et tout j dans $[[n]]$, on note :

$$\alpha_j^{(k)} = \min\{a_{i,j}^{(k)} \mid i \in [[n]]\}, \quad \beta_j^{(k)} = \max\{a_{i,j}^{(k)} \mid i \in [[n]]\}, \quad \delta_j^{(k)} = \beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)}.$$

4.a. Montrer que pour tout k dans $\mathbb{N}$, et tout j dans $[[n]]$, on a :

$$\alpha_j^{(k)} \leqslant \alpha_j^{(k+1)} \leqslant \beta_j^{(k+1)} \leqslant \beta_j^{(k)}, \qquad \delta_j^{(k+1)} \leqslant (1-2\varepsilon)\delta_j^{(k)}.$$

4.b. En déduire que $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge. Si $B = \lim_{k\to\infty} A^k$, comparer les lignes de B.

5. Dans chacun des cas suivants, préciser, en faisant le minimum possible de calculs, si la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge ou non :

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ; \qquad (2)\ A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ ;$$

$$(3)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ; \qquad (4)\ A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

IV Chaînes de Markov

Soit une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ à valeurs dans $[[n]]$. On dit que la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une *chaîne de Markov* (à n états) si les propriétés suivantes sont réalisées :

(CM1) Il existe une matrice $T = (p_{i,j})$ dans M, appelée *matrice de transition* telle que pour tout entier $k \geqslant 1$ et tous i et j dans $[[n]]$, on ait

$$P(X_k = j \mid X_{k-1} = i) = p_{i,j}.$$

Autrement dit, l'état X_k dépend de l'état X_{k-1} de manière invariable.

(CM2) Pour tout entier $k \geqslant 2$ et tous i, j, i_{k-2}, …, i_0 dans $[[n]]$, on a

$$P(X_k = j \mid X_{k-1} = i, X_{k-2} = i_{k-2}, \ldots, X_0 = i_0) = P(X_k = j \mid X_{k-1} = i).$$

Autrement dit, l'état X_k ne dépend que de l'état X_{k-1}.

On considère une telle chaîne de Markov $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$. On note $T = (p_{i,j})$ dans M sa matrice de transition. Pour tout entier k, on note $P(X_k = i) = q_i^{(k)}$ pour tout i dans $[[n]]$ et Q_k le vecteur ligne $Q_k = (q_1^{(k)}, \ldots, q_n^{(k)})$ (la loi de X_k). La loi de X_0 donnée par Q_0 que l'on notera simplement $Q_0 = (q_1, \ldots, q_n)$ est appelée *la loi initiale* de la chaîne.

1. Montrer que T est dans S (T est stochastique) et que pour tout $k \geqslant 0$, Q_k est un vecteur ligne stochastique, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} q_i^{(k)} = 1$.

2. Pour tout entier $k \geqslant 0$, montrer que $Q_{k+1} = Q_k T$. En déduire l'expression de la loi de X_k donnée par Q_k à l'aide de T et de la loi initiale donnée par Q_0.

3. Montrer qu'il existe une loi initiale telle que $Q_0 = Q_0 T$. Une telle loi est dite *stationnaire.*

[On sera amené à montrer que si un vecteur $V = (v_1, \ldots, v_n)$ vérifie $VT = V$ alors $V' = (|v_1|, \ldots, |v_n|)$ vérifie aussi $V'T = V'$.]

4. On suppose que la loi initiale est stationnaire, c'est-à-dire $Q_0 = Q_0 T$. Montrer qu'il existe une matrice $(q_{i,j})$ de S telle que $q_{i,j} = P(X_k = j \mid X_{k+1} = i)$ pour tout k entier.

V Un exemple de chaîne de Markov

Une urne contient initialement deux boules rouges et deux boules bleues. On décide de faire une succession de tirages avec la règle suivante : pour tout $k \geqslant 0$, la boule tirée au tirage k est laissée de côté au tirage $k+1$ et n'est remise dans l'urne que pour effectuer le tirage $k+2$. On considère la suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ où X_k est le nombre de boules rouges dans l'urne après le tirage k. Tous les tirages sont équiprobables sauf le tirage initial de numéro $k = 0$, pour lequel on décide que $P(X_0 = 1) = p$ pour un certain p dans $]0, 1[$ fixé.

0. Déterminer la loi de X_1, sa moyenne $E(X_1)$ et sa variance $\mathrm{var}(X_1)$.

1. Justifier que la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov dont on précisera la matrice de transition T et la loi initiale.

2. Montrer qu'il y a une seule loi stationnaire que l'on précisera.

3. En s'aidant des parties I à III, montrer que la suite des lois des X_k converge vers la loi stationnaire.

On note ici $R_k = [X_k = 1]$ l'événement "Au tirage k, une boule rouge a été tirée". On considère la variable aléatoire N égale au numéro d'ordre du premier tirage d'une boule rouge (autrement dit N est égal au plus petit entier k tel que R_k est réalisé).

4. Exprimer pour $k \geqslant 0$ l'événement $[N = k]$ à l'aide de R_i pour $i \leqslant k$.

5. En déduire la loi de N, sa moyenne $E(N)$ et sa variance $\mathrm{var}(N)$.