CM5

Fonctions caractéristiques

Nous allons voir une nouvelle fonction qui permettra de caractériser la loi d'une variable aléatoire, mais de façon plus intéressante que la fonction de répartition.

1 Fonction caractéristique

Définition 1 *Soit X une variable aléatoire. On appelle* **fonction caractéristique** *de X la fonction φ_X définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, par :*

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) \qquad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

En pratique, suivant les cas, la formule est différente :
– Si X est une variable discrète finie,

$$\varphi_X(t) = \sum_{j=1}^{n} e^{itx_j}\ \mathbb{P}(X = x_j).$$

– Si X est une variable discrète dénombrable,

$$\varphi_X(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} e^{itx_j}\ \mathbb{P}(X = x_j).$$

– Si X est une variable réelle,

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\ f(x)\ dx.$$

Remarque On a vu dans les chapitres précédents que l'espérance n'existe pas toujours. Or, dans le cas présent, on peut montrer que la fonction caractéristique est toujours définie, car :
– Si X est une variable discrète, la somme est finie donc définie.
– Si X est une variable dénombrable,

$$|\varphi_X(t)| \leq \sum_{j=1}^{+\infty} |e^{itx_j}\ \mathbb{P}(X = x_j)| = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_j) = 1$$

et donc la série est uniformément convergente.
– Si X est une variable réelle,

$$|\varphi_X(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx}\ f(x)|\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = 1$$

et donc l'intégrale est uniformément convergente.

Proposition 2 *Soit X une variable aléatoire, a et b deux réels.*
Alors les propriétés suivantes sont toujours vraies :

1. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\varphi_X(t)| \leq 1$.*
2. *$\varphi_X(0) = 1$.*
3. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$.*
4. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\ \varphi_X(at)$.*
5. *φ_X est continue sur $\mathbb{R}$.*

Preuve.
Les quatre premiers points se montrent de façon élémentaire. Pour le cinquième point, si X est finie, il suffit de remarquer que φ_X est une somme finie de fonctions continues et est donc continue. Dans les autres cas, on sait que la série ou l'intégrale converge uniformément. Comme il s'agit de série ou d'intégrale de fonctions continues, la fonction caractéristique est continue. □

2 Lois usuelles

Nous allons maintenant donner les fonctions de répartition des lois déjà vues, sauf celle de la loi hypergéométrique. Pour cette dernière, il faut mieux calculer “à la main” la fonction caractéristique dans chaque cas.

Proposition 3 *Les fonctions suivantes sont définies pour tout $t \in \mathbb{R}$:*

1. *Si $X \sim \mathcal{U}(n)$, alors* $\varphi_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}\dfrac{1-e^{itn}}{e^{-it}-1} & \text{si} \quad t \neq 2k\pi \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{si} \quad t = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.
2. *Si $X \sim b(n,p)$, alors* $\varphi_X(t) = (pe^{it} + 1 - p)^n$.
3. *Si $X \sim \mathcal{G}^*(p)$, alors* $\varphi_X(t) = \dfrac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$.
4. *Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors* $\varphi_X(t) = \dfrac{p}{1-(1-p)e^{it}}$.
5. *Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors* $\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$.
6. *Si $X \sim \mathcal{U}(]a,b[)$, alors* $\varphi_X(t) = \dfrac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$ *si $t \neq 0$,* $\varphi_X(0) = 1$.
7. *Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors* $\varphi_X(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - it}$.
8. *Si X suit la loi de Cauchy, alors* $\varphi_X(t) = e^{-|t|}$.
9. *Si $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma)$, alors* $\varphi_X(t) = e^{imt-t^2\sigma^2/2}$.

Corollaire 4 *On a les cas particuliers suivants. Soit $t \in \mathbb{R}$,*

1. *Si X suit la loi de Bernouilli $\mathcal{B}(p)$, c'est-à-dire la loi $b(1,p)$, alors* $\varphi_X(t) = pe^{it} + 1 - p$.
2. *Si X suit la loi uniforme $\mathcal{U}(]-a,a[)$, alors* $\varphi_X(t) = \dfrac{e^{-ita}-e^{ita}}{-2ita} = \dfrac{\sin(at)}{at}$ *si $t \neq 0$,* $\varphi_X(0) = 1$.
3. *Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, alors* $\varphi_X(t) = e^{-t^2/2}$.

3 Propriétés des fonctions caractéristiques

Commençons par une remarque fondamentale.

Théorème 5 *La fonction caractéristique caractérise la loi de probabilité d'une variable aléatoire, i.e. :*
– si on connait la fonction caractéristique de X, on connait la loi de X,
– si deux variables aléatoires ont même fonction caractéristique, c'est qu'elles ont même loi de probabilité.

On a le cas particulier d'une variable aléatoire réelle.

Théorème 6 *Si φ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X et si φ est intégrable, c'est-à-dire si :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)| \, dt < +\infty,$$

alors X admet une densité de probabilité f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \, \varphi(t) \, dt \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Ces deux théorèmes sont liés à la théorie de la transformée de Fourier. Nous allons nous en servir pour retrouver la fonction caractéristique de la loi de Cauchy donnée précédemment.

Corollaire 7 *Si X suit la loi de Cauchy, X a pour fonction caractéristique la fonction :*

$$\varphi_X(t) = e^{-|t|} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Preuve. Considérons la fonction $\varphi(t) = e^{-|t|}$. Comme cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$, c'est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle X de densité f, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\ e^{-|t|}\ dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{-itx+t}\ dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-itx-t}\ dt = \left[\frac{e^{(1-ix)t}}{2\pi(1-ix)}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{-e^{-(1+ix)t}}{2\pi(1+ix)}\right]_{0}^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2\pi(1-ix)} + \frac{1}{2\pi(1+ix)} = \frac{1-ix+1+ix}{2\pi(1-ix)(1+ix)} = \frac{1}{\pi(1+x^2)}. \end{aligned}$$

Donc X suit la loi de Cauchy et φ est la fonction de caractéristique associée à la loi de Cauchy. □

Définition 8 *On appelle* ***moment d'ordre*** *k ($k \in \mathbb{N}^*$) d'une variable aléatoire X, lorsqu'il existe, le réel $\mathbb{E}(X^k)$.*

Proposition 9 *Si le moment d'ordre k d'une variable aléatoire X existe, alors la fonction caractéristique de X est k fois dérivable et :*

$$\mathbb{E}(X^k) = \frac{1}{i^k}\ \varphi^{(k)}(0).$$

Preuve. On considère ici le cas réel. La démonstration est similaire dans le cas dénombrable. On suppose que X admet une densité f. Si $\mathbb{E}(X^k)$ existe, la fonction $x \mapsto (ix)^k\ e^{itx}\ f(x)$ est uniformément intégrable et d'après les propriétés des intégrales, φ_X est k fois dérivable et $\varphi^{(k)}(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (ix)^k\ e^{itx}\ f(x)\ dx$, c'est-à-dire, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi^{(k)}(t) = \mathbb{E}\left((iX)^k e^{itX}\right).$$

En particulier, pour $t = 0$:

$$\varphi^{(k)}(0) = \mathbb{E}(i^k\ X^k\ e^0) = i^k\ \mathbb{E}(X^k).$$

□

Dans certains cas où les calculs directs sont complexes, cette proposition permet d'obtenir rapidement $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X^2)$:

$$\mathbb{E}(X) = -i\ \varphi'_X(0) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}(X^2) = -\varphi''_X(0).$$

Proposition 10 *Soit X_1, ..., X_n n variables aléatoires <u>indépendantes</u>. Soit $S = \sum_{j=1}^{n} X_j$. Alors la fonction caractéristique de S est le produit des fonctions caractéristiques des X_j :*

$$\varphi_S(t) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_{X_j}(t) \qquad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \varphi_S(t) &= \varphi_{X_1+\ldots X_n}(t) &= \mathbb{E}\left(e^{it\sum_{j=1}^{n} X_j}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(e^{\sum_{j=1}^{n} itX_j}\right) &= \mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{n} e^{itX_j}\right). \end{aligned}$$

Comme les variables X_1, ..., X_n sont indépendantes, d'après une proposition du chapitre précédent, les variables e^{itX_1}, ..., e^{itX_n} sont indépendantes aussi et donc :

$$\varphi_S(t) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}(e^{itX_j}) = \prod_{j=0}^{n} \varphi_{X_j}(t).$$

□

Remarque Ce résultat permet de retrouver des résultats des chapitres précédents.

1. Soit $X \sim b(n,p)$ et $Y \sim b(m,p)$. Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $X + Y \sim b(n+m,p)$.
2. Soit $X \sim \mathbb{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathbb{P}(\mu)$. Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $X + Y \sim \mathbb{P}(\lambda + \mu)$.
3. Soit $X \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ et $Y \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$. Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $X + Y \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.

4. Si X et Y sont deux v.a.r. indépendantes, alors $X+Y$ a pour densité :

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u-v)\ f_Y(v)\ dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(v)\ f_Y(u-v)\ dv. \end{aligned}$$

Preuve. On démontre seulement les deux derniers points, les autres points se démontrent de la même façon.
3. Comme $X \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$, alors $\varphi_X(t) = e^{im_1t - t^2\sigma_1^2/2}$ et comme $Y \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$, alors $\varphi_Y(t) = e^{im_2t - t^2\sigma_2^2/2}$.
Puisque X et Y sont indépendantes, d'après la proposition précédente,

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\ \varphi_Y(t) = e^{i(m_1+m_2)t - t^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)/2} = e^{i(m_1+m_2)t - t^2(\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2})^2/2}.$$

On reconnait la fonction caractéristique de la loi normale de paramètres m_1+m_2 et $\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$, donc $X+Y \sim \mathcal{N}(m_1+m_2, \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2})$.
4. Comme X et Y sont indépendantes, d'après la proposition précédente,

$$\begin{aligned} \varphi_{X+Y}(t) &= \varphi_X(t)\ \varphi_Y(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\ e^{itx}\ dx \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(v)\ e^{itv}\ dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(v) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\ e^{it(x+v)}\ dx \right)\ dv \end{aligned}$$

On procède au changement de variable $u = x+v$:

$$\begin{aligned} \varphi_{X+Y}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(v) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u-v)\ e^{itu}\ du \right)\ dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(v)\ f_X(u-v)\ dv \right)\ du. \end{aligned}$$

On peut permuter les intégrales sans problème grâce au théorème de Fubini.
Puisque la fonction caractéristique caractérise la variable aléatoire, on a donc pour $X+Y$ la densité :

$$f_{X+Y}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(v)\ f_X(u-v)\ dv.$$

□

4 Convergence en loi

Définition 11 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur les espaces de probabilités respectifs $(\Omega_n, S_n, \mathbb{P}_n)$ et X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, S, \mathbb{P})$. Soit F_n la fonction de répartition de X_n et F celle de X. Notons $\mathcal{C}(F)$ l'ensemble des points où F est continue.*
On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge en loi*** *vers X (noté $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$) si, pour tout $x \in \mathcal{C}(F)$,*

$$\lim_{n\mapsto+\infty} F_n(x) = F(x).$$

Remarque Lorsque F_n converge vers une fonction F, il faut vérifier que F est bien une fonction de répartition. Ce n'est pas forcément le cas.

Théorème 12 *Théorème de continuité de Paul-Lévy :*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de fonction caractéristique φ_n.
Soit X une variable aléatoire de fonction caractéristique φ.
Alors :

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \Longleftrightarrow \forall\ t \in \mathbb{R},\ \lim_{n\mapsto+\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t).$$

En général, les fonctions caractéristiques sont plus simples à manipuler et à obtenir que les fonctions de répartition. De plus, il n'y a pas à se soucier de domaine de continuité, ici on considère la limite en tout point de $\mathbb{R}$. Le théorème de Paul-Lévy est donc plus pratique à utiliser, la plupart du temps, que la définition de la convergence en loi. Par contre, de même que pour la définition, si φ_n converge vers une fonction φ, il faut vérifier que cette fonction est bien une fonction caractéristique, ce qui n'est pas vrai a priori.
Par ce théorème, on retrouve un résultat déjà obtenu :

Corollaire 13 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires, $X_n \sim b(n,p_n)$.*
Si np_n converge vers $\lambda > 0$ quand n tend vers $+\infty$, alors X_n converge en loi vers X qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Preuve. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on sait que

$$\varphi_n(t) = (p_n e^{it} + 1 - p_n)^n = e^{n\ln(p_n e^{it}+1-p_n)}.$$

On a déjà utilisé, dans le chapitre 3, le fait que $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} p_n = 0$ car $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} np_n = \lambda$. Donc, quand n tend vers $+\infty$, $\ln(p_n e^{it} + 1 - p_n)$ se comporte comme $p_n e^{it} - p_n$. D'où :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} \varphi_n(t) = \lim_{n\mapsto+\infty} e^{n(p_n e^{it}-p_n)} = e^{\lambda e^{it}-\lambda}.$$

On reconnait la fonction caractéristique d'une variable $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, donc d'après le théorème de Paul-Lévy, on a bien $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. □

Le théorème de Paul-Lévy permet notamment de montrer le théorème central limite, énoncé dans le chapitre suivant.

5 Fonction caractéristique d'un couple

Dans cette partie, on notera toujours $X = (X_1, X_2)$ un couple de variables aléatoires et $T = (t_1, t_2)$ un couple de $\mathbb{R}^2$.

Définition 14 *Soit $X = (X_1, X_2)$ un couple de variables aléatoires. On appelle* ***fonction caractéristique du couple*** *(X_1, X_2) la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, par :*

$$\varphi(T) = \varphi_X(T) = \mathbb{E}(e^{i<T,X>}) \qquad \forall\ T \in \mathbb{R}^2$$

où $< T, X >$ est le produit scalaire de $\mathbb{R}^2$:

$$< T, X >= t_1X_1 + t_2X_2.$$

Par exemple, si le couple X admet une densité f, en utilisant le théorème de transfert, pour tout $T \in \mathbb{R}^2$:

$$\varphi_X(T) = \mathbb{E}(e^{i<T,X>}) = \iint_{RR^2} e^{i(t_1x_1+t_2x_2)}\ f(x_1, x_2)\ dx_1dx_2.$$

On peut vérifier, comme pour le cas unidimensionnel, que la fonction caractéristique d'un couple existe toujours. On retrouve les propriétés élémentaires des fonctions caractéristiques :

Proposition 15 *Soit φ la fonction caractéristique d'un couple de variables aléatoires, les propriétés suivantes sont toujours vraies :*

1. *φ est continue sur $\mathbb{R}^2$.*
2. *$\varphi(0,0) = 1$.*
3. *$\varphi(-T) = \overline{\varphi(T)}$ pour tout $T \in \mathbb{R}^2$.*
4. *$|\varphi(T)| \leq 1$ pour tout $T \in \mathbb{R}^2$.*

Corollaire 16 *Soit φ la fonction caractéristique d'un couple (X_1, X_2). Alors, pour tout $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$,*

$$\varphi_{X_1}(t_1) = \varphi(t_1, 0) \qquad \text{et} \qquad \varphi_{X_2}(t_2) = \varphi(0, t_2).$$

Proposition 17 *Soit $X=(X_1,X_2)$ un couple de variables aléatoires de fonction caractéristique φ. Si φ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire si*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |\varphi(t_1,t_2)|\ dt_1dt_2 < +\infty,$$

alors le couple (X_1,X_2) admet une densité de probabilité f donnée par :

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-i(t_1x_1+t_2x_2)}\ \varphi(t_1,t_2)\ dt_1dt_2.$$

Proposition 18 *Soit $X=(X_1,X_2)$ un couple de variables aléatoires de fonction caractéristique φ.*

1. *Si X_1 et X_2 admettent une espérance, alors les dérivées partielles $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t_1}$ et $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t_2}$ existent et :*

$$\mathbb{E}(X_1)=-i\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(0,0)\qquad \text{et}\qquad \mathbb{E}(X_2)=-i\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(0,0).$$

2. *Si X_1 et X_2 admettent un moment d'ordre 2, alors les dérivées partielles d'ordre 2 de φ existent et :*

$$\mathbb{E}(X_1X_2)=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial t_1\partial t_2}(0,0),\qquad \mathbb{E}(X_1^2)=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial t_1^2}(0,0),\qquad \mathbb{E}(X_2^2)=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial t_2^2}(0,0).$$

Proposition 19 *Soit $X=(X_1,X_2)$ un couple de variables aléatoires de fonction caractéristique φ. Les variables X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si, pour tout $T\in\mathbb{R}^2$,*

$$\varphi(T)=\varphi_{X_1}(t_1)\ \varphi_{X_2}(t_2).$$

Preuve. On va procéder en deux étapes.

Condition nécessaire
Supposons que X_1 et X_2 soient indépendantes. Soit $T\in\mathbb{R}^2$. Alors on sait que les variables $e^{it_1X_1}$ et $e^{it_2X_2}$ sont indépendantes.

$$\begin{array}{rcl} \varphi(T) & = & \mathbb{E}(e^{i(t_1X_1+t_2X_2)}) \quad = \quad \mathbb{E}(e^{it_1X_1}\ e^{it_2X_2}) \\ & \underset{\perp}{=} & \mathbb{E}(e^{it_1X_1})\ \mathbb{E}(e^{it_2X_2}) \quad = \quad \varphi_{X_1}(t_1)\ \varphi_{X_2}(t_2). \end{array}$$

Condition suffisante
On va traiter la condition suffisante uniquement pour le cas réel.
Supposons que, pour tout $T\in\mathbb{R}^2$,

$$\varphi(T)=\varphi_{X_1}(t_1)\ \varphi_{X_2}(t_2).$$

Alors :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{i(t_1x_1+t_2x_2)}\ f(x_1,x_2)\ dx_1dx_2 & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{it_1X_1}\ f_{X_1}(x_1)\ dx_1 \int_{\mathbb{R}} e^{it_2x_2}\ f_{X_2}(x_2)\ dx_2 \\ & = & \displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{i(t_1x_1+t_2x_2)}\ f_{X_1}(x_1)\ f_{X_2}(x_2)\ dx_1dx_2. \end{array}$$

Donc (X_1,X_2) a la même fonction caractéristique que le couple de loi $f_{X_1}f_{X_2}$, et puisque la fonction caractéristique caractérise la loi, la densité du couple est le produit des densités marginales, et donc X_1 et X_2 sont indépendantes. $\square$