CM2

# Variables aléatoires discrètes

## 1 Définition

Soit $\Omega$ un univers et $S$ une tribu sur $\Omega$. Une **variable aléatoire** $X : (\Omega, S) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est une application mesurable, i.e. pour tout $B$ dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in B\} \in S.$$

En fait, il suffit de vérifier (au choix) que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$, $X^{-1}(]-\infty, x|) \in S$, $X^{-1}(|x, +\infty[) \in S$ ou $X^{-1}(|x, y|) \in S$, les intervalles pouvant être pris ouverts ou fermés à gauche ou à droite.

Considérons une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, S)$. La loi de la variable aléatoire $X$ est donnée par l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par $X$, et par l'application $\mu : S \to [0, 1]$ définie pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par

$$\mu(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in B\}).$$

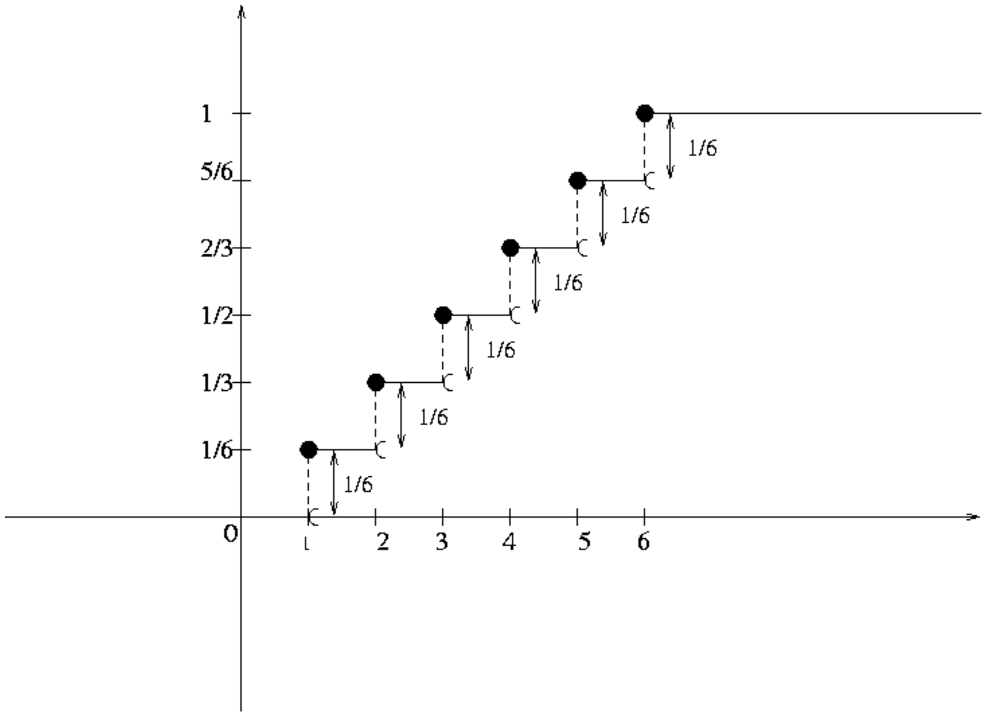
L'application $\mu$ est appelée **la loi** de la variable aléatoire $X$, notée parfois $\mu = \mathbb{P}_X$ ou $\mu = X(\mathbb{P})$. On peut montrer aisément qu'elle définit une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Dans ce chapitre, on s'intéressera exclusivement aux variables aléatoires discrètes.

***Définition 1*** *On dit que la variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est* ***discrète*** *lorsque $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable. La loi de $X$ est alors donnée par $X(\Omega)$ et par les probabilités $\mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.*

***Définition 2*** *On appelle* ***fonction de répartition*** *de $X$ la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.*

**Exemples** Si $X$ est la valeur obtenue en lançant un dé, on a $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $\mathbb{P}(X = i) = 1/6$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, 6$. On obtient la fonction de répartition de $X$ suivante :




***Proposition 3*** *Soit $F$ la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète $X$. Les propriétés suivantes sont toujours vraies :*
*– La fonction $F$ est à valeurs dans $[0, 1]$.*
*– $F$ croissante (car si $x < y$, $\mathbb{P}(X \leq x) \leq \mathbb{P}(X \leq y)$).*

- *Pour tout $x$ et $y$ réels tels que $x < y$, on a $\mathbb{P}(x < X \leq y) = F(y) - F(x)$.*
- *On a*

$$\lim_{x \mapsto -\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{x \mapsto +\infty} F(x) = 1.$$

- *Cette fonction est continue à droite et en escalier.*
- *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{P}(X = x) = F(x) - F(x^-)$.*

Cette dernière propriété permet de caractériser la loi de probabilité de $X$ : si on connait la loi, on connait $F$. Réciproquement si on connait la fonction de répartition $F$, on peut retrouver la loi de la manière suivante : les valeurs que peut prendre $X$ (c'est-à-dire $X(\Omega)$) sont tous les points de discontinuité de $F$ (i.e. là où $F$ fait un saut), et la valeur de probabilité à cet endroit (c'est-à-dire $\mathbb{P}(X = x)$ avec $x \in X(\Omega)$) est la hauteur du saut.

## 2 Espérance et variance

Nous allons d'abord définir la notion d'espérance mathématique ou moyenne, qui représente la valeur moyenne obtenue lors d'une expérience.

***Définition 4*** *Une variable aléatoire $X$ est dite **intégrable** si la quantité*

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x| \mathbb{P}(X = x)$$

*est finie. On définit alors l'**espérance** mathématique ou valeur moyenne de $X$, dénotée $\mathbb{E}(X)$, par :*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x).$$

*Plus généralement, si $\varphi$ est une fonction réelle telle que $\varphi \circ X$ est intégrable, on a :*

$$\mathbb{E}(\varphi \circ X) = \sum_{x \in X(\Omega} \varphi(x) \mathbb{P}(X = x).$$

En particulier si $X(\Omega)$ est finie, $X$ sera intégrable et admettra une espérance. Cependant si $X(\Omega)$ est dénombrable infinie, l'espérance de $X$ n'existe pas forcément et il s'agira donc de montrer que la somme

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x| \mathbb{P}(X = x)$$

est finie. Nous renvoyons à un cours d'analyse si nécessaire pour des rappels sur les suites et séries numériques.

**Exemple** Lancé de dé :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^{6} j \ \mathbb{P}(X = j) = \sum_{j=1}^{6} \frac{j}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

***Proposition 5*** – *Soient $a$ une constante et $X$ une variable aléatoire intégrable. Les variables aléatoires $X + a$ et $aX$ sont intégrables et on a $\mathbb{E}(X + a) = \mathbb{E}(X) + a$ et $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$.*
- *Si $X$ est une variable aléatoire intégrable et positive, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.*
- *Si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires intégrables vérifiant $X \leq Y$, alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.*

*On déduit de cette propriété que toute variable aléatoire bornée par une constante (ou plus généralement par une variable aléatoire intégrable) est intégrable.*
- *L'espérance est linéaire : si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires intégrables et $a$ et $b$ deux réels, $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$.*

Nous allons à présent définir la variance d'une variable aléatoire. Comme pour l'espérance, elle n'existe pas toujours.

***Définition 6*** *Soit $X$ une variable aléatoire de carré intégrable, i.e.*

$$\sum_{x \in X(\Omega)} x^2 \mathbb{P}(X = x) < +\infty.$$

*La **variance** $\mathrm{Var}(X)$ de la variable aléatoire $X$ est égale à*

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right).$$

*On appelle **écart-type** la quantité $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.*

**Remarques**
- si $X$ est de carré intégrable, $\mathrm{Var}(X)$ est bien définie : en effet on a

$$(X-\mathbb{E}(X))^2 = X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2 \leq X^2 + 2|X||\mathbb{E}(X)| + \mathbb{E}(X)^2 \leq 2X^2 + 2\mathbb{E}(X)^2$$

  qui est intégrable comme somme de deux fonctions intégrables (on utilise ici la majoration $2ab \leq a^2 + b^2$).
- Si $X(\Omega)$ est finie, $X$ est de carré intégrable et admet une variance (et une espérance).
- <u>ATTENTION</u> : comme pour l'espérance, la variance n'existe pas toujours. En particulier, la variance peut ne pas exister alors que l'espérance existe. Cependant si $X$ est de carré intégrable, elle est aussi intégrable :

$$|X| \leq \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}$$

  qui est la somme de deux fonctions intégrables. Ainsi si $X$ est de carré intégrable, elle admet une espérance et une variance.
- La variance est une quantité positive. Elle permet de caractériser la façon dont les valeurs prises par $X$ sont dispersées autour de la moyenne de $X$. Elle correspond à la distance moyenne entre les valeurs prises par $X$ et $\mathbb{E}(X)$. Plus la variance est grande, plus les valeurs sont dispersées autour de la moyenne.

***Proposition 7*** *1. Pour toute variable aléatoire $X$ de carré intégrable,*

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2.$$

*2. Si $a$ et $b$ sont des réels,* $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\ \mathrm{Var}(X)$.

**Preuve.** Le premier point se démontre directement à partir de la définition. Pour le deuxième point,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(aX+b) &= \mathbb{E}\big((aX+b)^2\big) - \big(\mathbb{E}(aX+b)\big)^2 \\
&= \mathbb{E}\big(a^2X^2 + 2abX + b^2\big) - \big(a\ \mathbb{E}(X) + b\big)^2 \\
&= a^2\ \mathbb{E}(X^2) + 2ab\ \mathbb{E}(X) + b^2 - a^2\big(\mathbb{E}(X)\big)^2 - 2ab\ \mathbb{E}(X) - b^2 \\
&= a^2\Big(\mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2\Big) \\
&= a^2\ \mathrm{Var}(X).
\end{aligned}$$

□

**Exemple** On reprend notre exemple habituel du dé :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 = \sum_{j=1}^{6} j^2\ \mathbb{P}(X=j) - \left(\frac{7}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) - \left(\frac{49}{4}\right) = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182-147}{12} = \frac{35}{12}
\end{aligned}$$

# 3 Lois discrètes finies classiques

## 3.1 Loi uniforme sur un ensemble fini

L'exemple type d'une variable suivant ce type de loi est $X$ le résultat d'un lancé de dé.

***Définition 8*** *Soit $X$ une variable aléatoire prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}$. On dira que $X$ suit une loi discrète uniforme si $\mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{n}$ pour tout $1 \leq i \leq n$.*
*Si $x_i = i$ pour tout $1 \leq i \leq n$, on dira que $X$ suit la loi uniforme discrète de paramètre $n$, noté $X \sim \mathcal{U}(n)$.*

Cela correspond au cas équiprobable. On peut calculer l'espérance et la variance d'une telle loi.

***Proposition 9*** *Si $X \sim \mathcal{U}(n)$ alors :*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

## 3.2 Loi de Bernouilli

On considère une urne contenant $a$ boules marquées A et $b$ boules marquées B (il y a donc $a+b$ boules dans l'urne). Soit $X$ la variable aléatoire qui vaut 0 si on tire une boule A et 1 si on tire une B. On a alors $\mathbb{P}(X=0) = \dfrac{a}{a+b}$ et $\mathbb{P}(X=1) = \dfrac{b}{a+b} = p$. On dit que $X$ suit une loi de Bernouilli de paramètre $p$.

***Définition 10*** *On dit qu'une variable aléatoire $X$ suit une loi de Bernouilli de paramètre $p$ ($0 \leq p \leq 1$) si $X$ ne prend que deux valeurs, 0 et 1, avec les probabilités :*

$$\mathbb{P}(X=1) = p \qquad , \qquad \mathbb{P}(X=0) = 1-p.$$

*On le note $X \sim \mathcal{B}(p)$.*

***Proposition 11*** *Si $X$ suit une loi de Bernouilli de paramètre $p$, alors :*

$$\mathbb{E}(X) = p \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}(X) = p(1-p).$$

## 3.3 Loi binomiale

Reprenons l'épreuve ci-dessus et répétons-là $n$ fois, en remettant la boule tirée dans l'urne à chaque fois. On note $X$ le nombre de boules A tirées. Si on tire $k$ boules A, il y a $C_n^k$ façons de les tirer (on ne s'intéresse pas à l'ordre) et chacune de ces boules a une probabilité $p$ d'être tirée. Il reste les $n-k$ boules B, qui ont une probabilité $1-p$ d'être tirée chacune. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X=k) = C_n^k \; p^k \; (1-p)^{n-k} \qquad \forall\; 0 \leq k \leq n.$$

***Définition 12*** *Une variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$ (noté $X \sim b(n,p)$) si elle prend les valeurs 0, 1, ..., $n$ avec la probabilité :*

$$\mathbb{P}(X=k) = C_n^k \; p^k \; (1-p)^{n-k} \qquad \forall\; 0 \leq k \leq n.$$

***Proposition 13*** *Si $X \sim b(n,p)$, alors :*

$$\mathbb{E}(X) = np \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{Var}(X) = np(1-p).$$

## 3.4 Loi hypergéométrique

Reprenons l'épreuve : on tire $n$ boules dans l'urne. Mais cette fois, on suppose qu'on le fait sans remise. Dans le cas de la loi binomiale, on pouvait faire autant de tirage qu'on voulait. Ici, on ne peut pas en faire plus de $a+b$, le nombre de boules dans l'urne, c'est-à-dire $1 \leq n \leq a+b$. Notons $X$ le nombre de boules A tirées. Cette variable prend les valeurs entières plus petites que $a$ (on ne peut pas tirer plus de boules A qu'il n'y en a dans l'urne) ; de plus, $n-X$ doit être plus petit que le nombre de boules B. On a alors :

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{C_a^k \; C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} \qquad \forall\; 0 \leq k \leq a \text{ et } 0 \leq n-k \leq b.$$

***Définition 14*** *Soit $a$, $b$ et $n$ dans $\mathbb{N}^*$ tels que $n \leq a+b$. Une variable aléatoire $X$ suit une loi hypergéométrique de paramètres $n$, $a$ et $b$ (noté $X \sim \mathcal{H}(n,a,b)$) si elle prend ses valeurs $k$ entre $\max(0, n-b)$ et $\min(a,n)$ et si $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{C_a^k \; C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$ pour tout $\max(0,\; n-b) \leq k \leq \min(a,\; n)$.*

***Proposition 15*** *Si $X \sim \mathcal{H}(n,a,b)$, alors :*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{na}{a+b} = np \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{nab}{(a+b)^2}\,\frac{a+b-n}{a+b-1} = np(1-p)\frac{a+b-n}{a+b-1}$$

*où $p = \dfrac{a}{a+b}$.*

# 4 Lois discrètes infinies classiques

## 4.1 Lois géométriques

On lance un dé jusqu'à ce qu'on obtienne 1. On note $X$ le nombre de lancés nécessaires. $X$ peut prendre n'importe quelle valeur de $\mathbb{N}^*$. Supposons qu'on obtienne 1 pour la première fois au $k^{eme}$ tirage ($k \geq 1$). On a alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(\textit{ne pas obtenir } 1 \textit{ au } 1^{er} \textit{ tirage} \bigcap \textit{ne pas obtenir } 1 \textit{ au } 2^{eme} \textit{ tirage} \bigcap ... \\ &\quad ... \bigcap \textit{ne pas obtenir } 1 \textit{ au } k-1^{eme} \textit{ tirage} \bigcap \textit{obtenir } 1 \textit{ au } k^{eme} \textit{ tirage})\end{aligned}$$

Comme les tirages sont indépendants, on peut supposer que les événements ci-dessus le sont aussi et donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(\textit{ne pas obtenir } 1 \textit{ au } 1^{er} \textit{ tirage})\ \mathbb{P}(\textit{ne pas obtenir } 1 \textit{ au } 2^{eme} \textit{ tirage})... \\ &\quad ...\mathbb{P}(\textit{ne pas obtenir } 1 \textit{ au } k-1^{eme} \textit{ tirage})\ \mathbb{P}(\textit{obtenir } 1 \textit{ au } k^{eme} \textit{ tirage}) \\ &= \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times ... \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

***Définition 16*** *Une variable aléatoire $X$ suit une loi géométrique de paramètre $p$ ($0 < p < 1$) à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ si, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,*

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}\ p.$$

*On le note $X \sim \mathcal{G}^*(p)$.*

Il arrive qu'on ait besoin de prendre en compte toutes les valeurs entières positives, 0 compris. Dans ce cas, soit $Y$ la variable aléatoire définie par $Y = X - 1$ où $X \sim \mathcal{G}^*(p)$. On dira que $Y \sim \mathcal{G}(p)$.

***Définition 17*** *On dit qu'une variable aléatoire $Y$ suit une loi géométrique de paramètre $p$ ($0 < p < 1$) à valeurs dans $\mathbb{N}$ si $Y + 1 = X$ avec $X \sim \mathcal{G}^*(p)$, c'est-à-dire si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = k+1) = (1-p)^k\ p.$$

*On le note $Y \sim \mathcal{G}(p)$.*

***Proposition 18*** *Soient $X \sim \mathcal{G}^*(p)$ et $Y \sim \mathcal{G}(p)$, $X$ et $Y$ admettent une espérance et une variance valant :*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}(Y) = \frac{1-p}{p},$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = \frac{1-p}{p^2}.$$

## 4.2 Loi de Poisson

***Définition 19*** *On dit que $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$ ($\lambda > 0$) si $X$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

*On le note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.*

Dans quels cas utilise-t-on une loi de Poisson ? La plupart du temps, comme approximation d'une loi binomiale, grâce à la proposition suivante :

***Proposition 20*** *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires suivant une loi binomiale $b(n, p_n)$, telles que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} n\ p_n = \lambda$ avec $\lambda > 0$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$\lim_{n \mapsto +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \mathbb{P}(Y = k)$$

*où $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$.*

**Preuve.** Soit $n \geq k$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = k) &= C_n^k \; p_n^k \; (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \; p_n^k \; (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{1}{k!} \; \frac{(n-k+1)(n-k+2)...(n-1) \; n}{n^k} \; (n \; p_n)^k \; (1-p_n)^{n-k}
\end{aligned}$$

Or, quand $n$ tend vers l'infini ; $n(n-1)...(n-k+1) \sim n^k$. On en déduit la limite :

$$\lim_{n \mapsto +\infty} \frac{(n-k+1)...(n-1) \; n}{n^k} = \lim_{n \mapsto +\infty} \frac{n^k}{n^k} = 1.$$

Par hypothèse, $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} n \; p_n = \lambda$. Donc :

$$\lim_{n \mapsto +\infty} (n \; p_n)^k = \lambda^k.$$

Il ne reste plus qu'à déterminer la limite de $(1-p_n)^{n-k} = e^{(n-k)\ln(1-p_n)}$.
Or, vu que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} n \; p_n = \lambda$, on a nécessairement $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} p_n = 0$, donc quand $n$ tend vers l'infini, $\ln(1-p_n) \sim -p_n$.
D'où :

$$\lim_{n \mapsto +\infty} (1-p_n)^{n-k} = \lim_{n \mapsto +\infty} e^{-(n-k) \; p_n} = \lim_{n \mapsto +\infty} e^{-n \; p_n} e^{k \; p_n} = e^{-\lambda} \; e^0 = e^{-\lambda}.$$

Au final, on a donc :

$$\lim_{n \mapsto +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{k!} \times 1 \times \lambda^k \times e^{-\lambda} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

□

En pratique, si on a $X \sim b(n,p)$ avec $n$ grand et $p$ petit (par exemple, $n > 50$ et $p < 0,1$), on peut remplacer $X$ par $Y \sim \mathcal{P}(np)$ dans les calculs. C'est-à-dire, pour tout $0 \leq k \leq n$,

$$\mathbb{P}(X = k) \simeq \mathbb{P}(Y = k) = \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}.$$

C'est en général plus facile à calculer.

***Proposition 21*** *Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Alors $X$ admet une espérance et une variance et :*

$$\mathbb{E}(X) = \mathrm{Var}(X) = \lambda.$$

# 5 Tableau récapitulatif

## 5.1 Variables aléatoires discrètes finies à connaître

| Loi de $X$ | Valeurs de $X$ | $\mathbb{P}(X = k)$ | $E(X)$ | $\mathrm{Var}(X)$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{U}(n)$ | $\{1, \; 2, \; ..., \; n\}$ | $\frac{1}{n}$ | $\frac{n+1}{2}$ | $\frac{n^2-1}{12}$ |
| $\mathcal{B}(p)$ | $\{0, \; 1\}$ | $p$ si $k=1$, $1-p$ si $k=0$ | $p$ | $p(1-p)$ |
| $b(n,p)$ | $\{0, \; 1, \; ..., \; n\}$ | $C_n^k \; p^k \; (1-p)^{n-k}$ | $np$ | $np(1-p)$ |
| $\mathcal{H}(n,a,b)$ | $\max(0, n-b) \leq k \leq \min(a,n)$ | $\frac{C_a^k \; C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$ | $\frac{na}{a+b}$ | $\frac{nab}{(a+b)^2} \; \frac{a+b-n}{a+b-1}$ |

## 5.2 Variables aléatoires discrètes infinies à connaître

| Loi de $X$ | Valeurs de $X$ | $\mathbb{P}(X = k)$ | $E(X)$ | $\mathrm{Var}(X)$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{G}^*(p)$ | $\mathbb{N}^*$ | $(1-p)^{k-1} \; p$ | $\frac{1}{p}$ | $\frac{1-p}{p^2}$ |
| $\mathcal{G}(p)$ | $\mathbb{N}$ | $(1-p)^k \; p$ | $\frac{1-p}{p}$ | $\frac{1-p}{p^2}$ |
| $\mathbb{P}(\lambda)$ | $\mathbb{N}$ | $\frac{\lambda^k}{k!} \; e^{-\lambda}$ | $\lambda$ | $\lambda$ |