CM1

Espaces probabilisés

1 Définition

Pour définir un espace probabilisé, on a besoin d'un ensemble Ω appelé **univers**, qui peut représenter l'ensemble des résultats possibles de l'expérience considérée.

Exemples
- Pour le jet d'une pièce de monnaie, $\Omega = \{0, 1\}$ convient, où 0 représente pile et 1 représente face.
- Pour le lancé d'une fléchette sur une cible, $\Omega =$ un disque du plan euclidien convient.
- Pour la durée de vie d'une ampoule électrique, $\Omega = \mathbb{R}^+$.
- Pour le lancé d'un dé, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Avant de définir les probabilités, nous avons besoin d'introduire la notion de tribu, nécessaire à une définition rigoureuse de la probabilité.

Définition 1 *Une famille S de parties d'un ensemble Ω est appelée **tribu** ou σ-algèbre si elle vérifie les propriétés suivantes :*
- $\Omega \in S$.
- *Si $(A_n)_n$ est une suite (éventuellement finie) d'éléments de S, alors $\bigcup_n A_n \in S$.*
- *Si A est un élément de S, alors $\overline{A} \in S$.*

Une tribu S est toujours incluse dans l'ensemble des parties de Ω, noté $P(\Omega)$. Les éléments de S sont appelés **événements**, et Ω est l'événement certain. Si S est une tribu, alors
- $\emptyset \in S$.
- Si $(A_n)_n$ est une suite d'éléments de S, alors $\bigcap_n A_n \in S$.

Exemples
- L'ensemble des sous-parties de Ω, $P(\Omega)$, est une tribu. Si Ω est fini ou dénombrable, c'est en général celle sur laquelle on travaille.
- Si Ω est $\mathbb{R}$ (ou un intervalle de $\mathbb{R}$), la tribu utilisée sera le plus souvent la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire la plus petite tribu (au sens de l'inclusion des tribus) contenant (au choix) : les intervalles, les ouverts ou les fermés.

Définition 2 *Soit Ω un ensemble muni d'une tribu S. On appelle **probabilité** toute application $\mathbb{P}$ de S dans $[0, 1]$, vérifiant les propriétés :*
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- *Si $(A_n)_n$ est une suite (éventuellement finie) d'éléments de S deux à deux incompatibles (i.e. $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$), alors :*

$$\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mathbb{P}(A_n).$$

*Le triplet $(\Omega,\ S,\ \mathbb{P})$ est appelé **espace de probabilité** ou **espace probabilisé**.*

2 Propriétés élémentaires des probabilités

Proposition 3 *Soit A et B deux événements quelconques (i.e. $A, B \in S$). Alors*
1. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$,
2. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$,
3. $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$,
4. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Preuve.

1. Les événements A et $\overline{A}$ sont incompatibles, donc d'après la définition d'une probabilité,
$$\mathbb{P}(\overline{A}) + \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\overline{A} \cup A) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$
2. C'est une application directe du résultat précédent en prenant $A = \Omega$.
$$\mathbb{P}(\overline{\Omega}) + \mathbb{P}(\Omega) = 1 = \mathbb{P}(\emptyset) + 1.$$
3. Les événements $B \cap A$ et $B \cap \overline{A}$ sont incompatibles et de plus $B = B \cap \Omega = B \cap (A \cup \overline{A}) = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$. Grâce à cela, on obtient :
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}((B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A}).$$
4. On remarque que les événements A et $B \cap \overline{A}$ sont disjoints. On a donc :
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cup (B \cap \overline{A})) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A}).$$
Grâce au résultat du 3., on a $\mathbb{P}(B \cap \overline{A}) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ et donc on a bien :
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

□

On montre facilement par récurrence le résultat suivant appelé formule de Poincaré ou formule du crible :

Proposition 4 *Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ n évènements quelconques de Ω, on a*
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^n \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

3 Probabilités discrètes

La probabilité $\mathbb{P}$ est dite **discrète** dès que l'espace Ω est fini ou dénombrable. La tribu associée est alors généralement $P(\Omega)$, l'ensemble des parties de Ω. Une probabilité sur un ensemble dénombrable est complètement déterminée par les $\mathbb{P}(\{\omega\})$ pour tout $\omega \in \Omega$. En effet, pour $A \subset \Omega$, on a
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega).$$
En particulier, $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega)$.

Exemples

- Lancer d'une pièce équilibrée : on souhaite modéliser le résultat du lancer d'une pièce sans tricherie. Pour cela, on choisit $\Omega_1 = \{pile, face\}$. L'ensemble des parties de Ω_1 comporte quatre éléments et on définit la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ par $\mathbb{P}(pile) = \mathbb{P}(face) = 1/2$ puisque les deux événements sont équiprobables (i.e. de même probabilité).
- Lancer de k pièces, $k \geq 2$: on prend cette fois-ci $\Omega_k = \Omega_1^k$, c'est-à-dire l'ensemble des k-uplets de pile ou face. On a $\mathrm{Card}(\Omega_k) = 2^k$. Les différents k-uplets sont tous équiprobables donc $\mathbb{P}(\omega) = 2^{-k}$, pour tout $\omega \in \Omega_k$.

On aboutit ainsi naturellement à la

Définition 5 *Supposons que Ω soit un ensemble <u>fini</u>. On dit qu'on se trouve dans un cas* ***équiprobable*** *si tous les événements élémentaires ont même valeur de probablité. On dit aussi que la probabilité est* ***uniforme discrète****.*

Dans le cas équiprobable, on a donc $\mathbb{P}(\omega) = p$ pour tout $\omega \in \Omega$, où $p = 1/\mathrm{Card}(\Omega)$. On peut alors écrire :
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega \in A} \frac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)},$$
soit encore :
$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

ATTENTION, cette formule n'est valable que pour les cas équiprobables. Elle fonctionne dans l'exemple du dé normal, mais pas dans celui du dé truqué.

Il ne peut bien sûr pas y avoir de probabilité uniforme sur $\mathbb{N}$.

Exemples Mesure de probabilité sur $\mathbb{N}^*$. On lance un dé de façon répétée jusqu'à obtenir un 6, et on note le numéro du tirage du premier 6. On a évidemment $\mathbb{P}(1) = 1/6$. On a également

$$\mathbb{P}(2) = \mathbb{P}(\text{au premier tirage, on n'a pas eu de 6 ; au deuxième tirage, on a eu un 6}) = \frac{5}{36}$$

car sur les 36 tirages possibles équiprobables, seuls 5 permettent d'obtenir le premier 6 au deuxième tirage. De même, pour tout $k \geq 2$,

$$\mathbb{P}(k) = \mathbb{P}(k-1 \text{ echecs, puis une réussite}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}.$$

Cela constitue bien une mesure de probabilité discrète sur $\mathbb{N}^*$ puisque $\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(k) = 1$.

4 Probabilités à densité

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction positive, continue par morceaux (ou plus généralement mesurable, i.e. $\{x, f(x) \leq y\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $y \in \mathbb{R}$) et d'intégrale sur $\mathbb{R}$ égale à 1. Il est facile de vérifier que l'on définit une probabilité en posant, pour tout $A \subset \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(A) = \int_A f(x)dx.$$

Une telle probabilité est dite **à densité**. On dit également que c'est une **probabilité continue**.

Exemples
– La mesure uniforme sur l'intervalle $[a, b]$, où $a < b$: On définit

$$\mathbb{P}(A) = \int_{A \cap [a,b]} \frac{1}{b-a} dx.$$

– La probabilité de Gauss sur $\mathbb{R}$. On utilise ici la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}^{+*}$ sont deux paramètres fixés.

5 Probabilités conditionnelles

Reprenons l'exemple du dé. Notons A l'événement "on obtient un 2" et B l'événement "on n'obtient pas 1". L'événement $A \cap B$ est égal à A car si on obtient 2 et pas 1, c'est qu'on a obtenu 2 tout court. Donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/6$. De plus, $\mathbb{P}(B) = 5/6$ car il y a 5 résultats favorables sur 6 si on n'obtient pas 1.

Supposons maintenant qu'on sache que B est vérifié, c'est-à-dire qu'on n'a pas obtenu 1. Dans ce cas, la probabilité d'obtenir 2 est de $1/5$, car il n'y a plus que 5 résultats possibles (et on est toujours dans un cas équiprobable). On remarque que cette probabilité vaut exactement $\mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$. C'est ce qu'on appelle une probabilité conditionnelle.

Définition 6 *Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. On appelle* ***probabilité conditionnelle*** *de A sachant B (c'est-à-dire sachant que B est réalisé), notée $\mathbb{P}(A/B)$ le quotient :*

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Proposition 7 *Soit B un événement de probabilité $\mathbb{P}(B)$ non nulle. Alors $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{P}(A/B)$ est une probabilité sur S.*

Preuve. Il suffit de montrer que $\mathbb{Q}$ vérifie bien les propriétés de la définition d'une probabilité.

– Soit $A \in S$; on a alors
$$0 \leq \mathbb{Q}(A) = \mathbb{P}(A/B) \leq 1$$
car $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) \geq \mathbb{P}(A \cap B)$.

– On a
$$\mathbb{Q}(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega/B) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1.$$

– Soit $(A_n)_n$ une famille d'événements deux à deux incompatibles.
$$\mathbb{Q}(\bigcup_n A_n) = \mathbb{P}((\bigcup_n A_n)/B) = \frac{\mathbb{P}((\bigcup_n A_n) \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\bigcup_n (A_n \cap B))}{\mathbb{P}(B)} = \sum_n \frac{\mathbb{P}(A_n \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_n \mathbb{P}(A_n/B)$$

On a bien vérifié toutes les propriétés, donc $\mathbb{Q}$ est une probabilité sur S. □

Définition 8 *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille (finie) d'événements (en général non impossibles, i.e. $\mathbb{P}(A_i) > 0$ pour tout i). On dira que c'est un **système complet d'événements** si :*
$$\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega \qquad \text{et} \qquad A_i \cap A_j = \emptyset, \ \forall i \neq j.$$

Proposition 9 *Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements et soit B un événement quelconque. Alors :*
$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \cap A_i).$$

Preuve. Puisque $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements, $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$. On peut écrire :
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap \Omega) = \mathbb{P}(B \cap (\bigcup_{i \in I} A_i)) = \mathbb{P}(\bigcup_{i \in I} (B \cap A_i))$$

Or, par définition d'un système complet, les A_i sont deux à deux incompatibles. Les $B \cap A_i$ le sont donc aussi, et on a bien finalement :
$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \cap A_i).$$
□

Proposition 10 *Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements et B un événement vérifiant $\mathbb{P}(B) \neq 0$ et $\mathbb{P}(A_i) \neq 0 \ \forall \ i \in I$. Alors,*

1.
$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B/A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

2. Formule de Bayes :
$$\mathbb{P}(A_k/B) = \frac{\mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(B/A_k)}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B/A_i)} \qquad \forall \ k \in I.$$

On a un corollaire immédiat :

Corollaire 11 *Soit A et B deux événements vérifiant $\mathbb{P}(B) \neq 0$ et $0 < \mathbb{P}(A) < 1$. Alors :*
$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(B/A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B/A) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B/\overline{A})}.$$

Démontrons la proposition précédente.

Preuve.

1. On a vu (prop 1.3.2) que :
$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \cap A_i).$$
Puisque $\mathbb{P}(B/A_i) = \dfrac{\mathbb{P}(B \cap A_i)}{\mathbb{P}(A_i)}$, on a bien :
$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B/A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

2. Par définition des probabilités conditionnelles, $\mathbb{P}(A_k/B) = \dfrac{\mathbb{P}(A_k \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$. On peut donc écrire, en utilisant le même raisonnement que ci-dessus :
$$\mathbb{P}(A_k/B) = \frac{\mathbb{P}(B/A_k)\mathbb{P}(A_k)}{\mathbb{P}(B)}.$$
En utilisant le résultat du 1. et en remplaçant $\mathbb{P}(B)$, on obtient bien :
$$\mathbb{P}(A_k/B) = \frac{\mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(B/A_k)}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B/A_i)}.$$

□

6 Evénements indépendants

Prenons une urne contenant des jetons numérotés de 1 à N. Considérons les événements A = "obtenir le jeton 1 au premier tirage" et B = "obtenir le jeton 1 au deuxième tirage". Si les tirages se font sans remise et que l'événement A est réalisé, l'événement B ne peut pas être réalisé. Par contre, si les tirages se font avec remise, le fait que l'événement A soit réalisé ou non n'influe pas sur la probabilité que B soit réalisé et vice-versa. C'est ce qu'on appelle des événements indépendants.

Proposition 12 *Soit A et B deux événements de probabilité non nulle. Alors les trois énoncés suivants sont équivalents :*

1. $\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A)$
2. $\mathbb{P}(B/A) = \mathbb{P}(B)$
3. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Preuve. Elle se fait facilement par succession d'équivalence :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A) \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B) \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathbb{P}(B/A) = \mathbb{P}(B)
\end{aligned}$$

□

Définition 13 *Deux événements A et B sont dits* ***indépendants*** *(noté $A \coprod B$) si et seulement si :*
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Proposition 14 *Soit A et B deux événements. Alors on a :*

1. $A \coprod A \Longleftrightarrow \mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.
2. $A \coprod B \Longleftrightarrow A \coprod \overline{B} \Longleftrightarrow \overline{A} \coprod B \Longleftrightarrow \overline{A} \coprod \overline{B}$.

Preuve.

1. $A \coprod A \Longleftrightarrow \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}^2(A) \Longleftrightarrow \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(A)) = 0 \Longleftrightarrow \mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.

2. Il suffit de montrer la première équivalence, les autres sont alors automatiques.

$$\begin{array}{llll} A \coprod B & \iff \mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) & \iff & \mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)(1-\mathbb{P}(\overline{B}) \\ & \iff \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B})=\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(A\cap B) & \iff & \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B})=\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(A\cap\overline{B})-\mathbb{P}(A\cap B) \\ & \iff \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B})=\mathbb{P}(A\cap\overline{B}) & \iff & A\coprod\overline{B}. \end{array}$$

□

On peut étendre cette notion d'événements indépendants à une famille :

Définition 15 *Une famille d'événements $(A_i)_{i\in I}$ est dite* ***indépendante*** *si pour toute sous-famille finie $(A_{i_1},\ A_{i_2},\ ...,\ A_{i_n})$ de cette famille, on a :*

$$\mathbb{P}(\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_{i_j}).$$

On retrouve les mêmes propriétés que pour deux événements indépendants.

ATTENTION, le fait que les événements $(A_i)_{i\in I}$ sont indépendants entraîne qu'ils sont indépendants deux à deux, mais la réciproque est fausse.

Exercice On lance une pièce deux fois de suite. Soit A l'événement "obtenir face au premier jet", B l'événement "obtenir face au deuxième jet", et C l'événement "obtenir deux résultats différents". Montrer que les événements A, B, C sont deux à deux indépendants, mais que la famille (A, B, C) n'est pas indépendante.