CM2

Applications linéaires d'un espace euclidien

1 Formes linéaires sur un espace euclidien

1.1 Représentations des formes linéaires

Rappelons qu'un **espace euclidien** E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire $< \cdot\, ;\, \cdot >$ et de dimension finie. Comme tout sous-espace vectoriel F de E est alors de dimension finie, on a montré au chapitre précédent que :

$$E = F \oplus F^\perp \text{ et } (F^\perp)^\perp = F.$$

Proposition 1 *Pour toute forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$, il existe un unique vecteur $v \in E$ tel que :*

$$\forall x \in E,\ \varphi(x) =< v, x > .$$

En d'autres termes, l'application $v \in E \mapsto \varphi_v =< v;\ \cdot >\in E^*$ est un isomorphisme (où E^* désigne le dual de E, i.e. l'espace vectoriel des formes linéaires de E).

Preuve. L'appliaction $\Phi : v \in E \mapsto \varphi_v =< v;\ \cdot >\in E^*$ est linéaire de E dans E^* car

$$\varphi_{\lambda u+\mu v} =< \lambda u + \mu v;\ \cdot >= \lambda < u;\ \cdot > +\mu < v;\ \cdot >= \lambda\varphi_u + \mu\varphi_v.$$

Φ est injective car si $v \in \ker(\Phi)$, on a $\Phi(v) = \varphi_v = 0_{E^*}$. D'où pour tout $x \in E$, $\varphi_v(x) = 0$ et en particulier pour $x = v$,

$$\varphi_v(v) =< v; v >= ||v||^2 = 0$$

et $v = 0_E$. Enfin Φ est un isomorphisme puisqu'elle est linéaire injective et que $\dim(E) = \dim(E^*)$. □

1.2 Application à l'adjoint d'un endomorphisme

Proposition 2 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique endomorphisme $f^* \in \mathcal{L}(E)$, appelé l'**adjoint de** f, tel que l'on ait :*

$$\forall x, y \in E, < x, f(y) >=< f^*(x), y > .$$

Preuve. Pour tout $x \in E$, on considère l'application $y \in E \mapsto< x, f(y) >\in \mathbb{R}$. C'est une forme linéaire sur E, et par la proposition précédente il existe un unique vecteur que l'on note $f^*(x) \in E$ tel que l'on ait :

$$\forall y \in E, < x, f(y) >=< f^*(x), y > .$$

On définit ainsi une application f^* associant à tout vecteur x de E, le vecteur $f^*(x)$ de E. On montre alors que cette application est linéaire : pour tout $x_1, x_2, y \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} < f^*(\lambda x_1 + \mu x_2), y > &= < \lambda x_1 + \mu x_2, f(y) >= \lambda < x_1, f(y) > +\mu < x_2, f(y) > \\ &= \lambda < f^*(x_1), y > +\mu < f^*(x_2), y >=< \lambda f^*(x_1), y > + < \mu f^*(x_2), y > \\ &= < \lambda f^*(x_1) + \mu f^*(x_2), y > . \end{aligned}$$

Ainsi on a montré que pour tout $y \in E$, $< f^*(\lambda x_1 + \mu x_2) - (\lambda f^*(x_1) + \mu f^*(x_2)), y >= 0$. En prenant $y = f^*(\lambda x_1 + \mu x_2) - (\lambda f^*(x_1) + \mu f^*(x_2))$ on obtient

$$||f^*(\lambda x_1 + \mu x_2) - (\lambda f^*(x_1) + \mu f^*(x_2))||^2 = 0$$

et donc $f^*(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda f^*(x_1) + \mu f^*(x_2)$. □

Proposition 3 *On a les propriétés suivantes*

- $\forall f \in \mathcal{L}(E), (f^*)^* = f$.
- $\forall f, g \in \mathcal{L}(E), (g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall f, g \in \mathcal{L}(E)$, $(\lambda f + \mu g)^* = \lambda f^* + \mu g^*$.

Preuve. Ceci résulte directement des égalités suivantes : pour tout $x, y \in E$,

$$< (f^*)^*(x), y >=< x, f^*(y) >=< f(x), y >$$

pour le premier point,

$$< (g \circ f)^*(x), y >=< x, g \circ f(y) >=< g^*(x), f(y) >=< f^* \circ g^*(x), y >$$

pour le deuxième point. Faites le dernier point en exercice !! □

Remarque :

- On montre facilement que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda \mathrm{Id}_E)^* = \lambda \mathrm{Id}_E$.
- Si f est un automorphisme de E, on a $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$. On montre alors que f^* est aussi un automorphisme, et que $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$, car :

$$(f \circ f^{-1})^* = (f^{-1})^* \circ f^* = \mathrm{Id}_E \text{et} (f^{-1} \circ f)^* = f^* \circ (f^{-1})^* = \mathrm{Id}_E.$$

Exemples : adjoints d'endomorphismes simples

- L'adjoint d'un projecteur p est un projecteur. En effet, la relation $p \circ p = p$ implique $p^* \circ p^* = p^*$ par passage à l'adjoint.
- De même l'adjoint d'une symétrie s est une symétrie en utilisant la relation caractéristique $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

Proposition 4 *Pour tout endomorphisme f de l'espace euclidien E, on a*

$$\ker(f^*) = (\mathrm{im}(f))^{\perp} \text{ et } \mathrm{im}(f^*) = (\ker(f))^{\perp}.$$

Preuve. La deuxième égalité se déduit de la première en passant à l'orthogonal, puis en changeant f en f^* compte-tenu de $(f^*)^* = f$. Pour la première, on a

$$\begin{aligned} x \in \ker(f^*) &\Leftrightarrow f^*(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall y \in E, < f^*(x), y >= 0 \\ &\Leftrightarrow \forall y \in E, < x, f(y) >= 0 \\ &\Leftrightarrow x \in (\mathrm{im}(f))^{\perp}. \end{aligned}$$

□

Proposition 5 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel stable par f (i.e. $f(F) \subseteq F$). Alors $F^{\perp}$ est un sous espace vectoriel stable par f^*.*

Preuve. Ceci résulte de l'égalité suivante :

$$\forall x \in F^{\perp}, \forall y \in F, < f^*(x), y >=< x, f(y) >= 0 \text{ puisque } f(y) \in F.$$

D'où $f^*(x) \in F^{\perp}$. □

Proposition 6 *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. La matrice de l'adjoint f^* de f dans la base $\mathcal{B}$ est la transposée de la matrice de f :*

$$\mathcal{M}(f^*, \mathcal{B}) = {}^t\mathcal{M}(f, \mathcal{B}).$$

ATTENTION, ceci n'est vrai que si la base est orthonormale.

Preuve. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$. Dans cette base orthonormée, on sais que pour tout $v \in E$:

$$v = \sum_{1\leq j\leq n} < v, e_j > e_j.$$

Ainsi :

$$f^*(e_i) = \sum_{1\leq j\leq n} < f^*(e_i), e_j > e_j = \sum_{1\leq j\leq n} < e_i, f(e_j) > e_j.$$

Or $< e_i, f(e_j) >$ est la i-ème composante du vecteur $f(e_j)$, i.e. $m_{j,i}$. D'où l'égalité matricielle. □

Remarque : De ce résultat et des propriétés de la trace et du déterminant, on en déduit

$$\det(f^*) = \det(f) \text{ et } \mathrm{Tr}(f^*) = \mathrm{Tr}(f).$$

De même on montre que $\det(f^* - X\mathrm{Id}_E) = \det(f - X\mathrm{Id}_E)$, et que les polynômes caractéristiques de f et f^* sont égaux. Enfin une matrice étant diagonalisable si et seulement si sa transposée l'est, on en déduit que f est diagonalisable si et seulement si f^* est diagonalisable.

2 Automorphismes orthogonaux

Définition 7 *On dit qu'un endomorphisme f est* ***orthogonal*** *(ou isométrie vectorielle) si f est inversible et $f^* = f^{-1}$.*

Remarque : On peut montrer qu'il y a équivalence entre

- f est orthogonal.
- f conserve la norme euclidienne : $\forall x \in E$, $||f(x)|| = ||x||$.
- f conserve le produit scalaire : $\forall x, y \in E$, $< f(x), f(y) >=< x, y >$.
- f transforme toute base orthonormale en une base orthonormale.

La démonstration est laissée en exercice. Toutes ces caractérisations d'un endomorphisme orthogonal sont à connaître.

Remarque : En prenant le déterminant dans la relation définissant un endomorphisme orthogonal, on obtient

$$\det(f^*)\det(f) = (\det(f))^2 = \det(\mathrm{Id}_E) = 1.$$

En particulier $\det(f) = \pm 1$, ce qui justifie la définition suivante :

Définition 8 *Un endomorphisme orthogonal f de E sera dit :*

- ***direct*** *si* $\det(f) = 1$,
- ***indirect*** *si* $\det(f) = -1$.

ATTENTION, ce n'est pas parce qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ satisfait $\det(f) = \pm 1$ qu'il est orthogonal !! À vous de trouver des contres exemples.

Proposition 9 *L'ensemble des automorphismes orthogonaux de E forme un groupe, appelé* ***groupe orthogonal*** *de E, et noté $O(E)$.*
Les automorphismes orthogonaux directs en forment un sous-groupe noté $SO(E)$, appelé ***groupe spécial orthogonal****, ou groupe de rotations de E.*

Preuve. Il suffit de montrer que $O(E)$ est un sous-groupe du groupe $GL(E)$. Il est en effet non vite puisque $\mathrm{Id}_E \in O(E)$, et satisfait :

- $\forall f, g \in O(E)$, $g \circ f \in O(E)$ puisqu'on a $\forall x \in E, ||g \circ f(x)|| = ||f(x)|| = ||x||$,
- $\forall f \in O(E)$, $f^{-1} \in O(E)$ puisqu'on a $\forall x \in E, ||f^{-1}(x)|| = ||f \circ f^{-1}(x)|| = ||x||$.

□

Proposition 10 *On considère un endomorphisme orthogonal f de E. Ses seules valeurs propres réelles sont* 1 *et* -1.

Preuve. Soit λ une valeur propre réelle, v un vecteur propre associé à λ. En particulier $v \neq 0_E$, et on a

$$||v|| = ||f(v)|| = ||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v||.$$

D'où $|\lambda| = 1$, et $\lambda = \pm 1$. $\square$

Proposition 11 *Soit f un endomorphisme orthogonal de E. Si un sous-espace F est stable par f, alors $F^\perp$ est stable par f.*

Preuve. Supposons que F soit stable par F, i.e. $f(F) \subseteq F$. f induit sur F un endomorphisme qui est toujours orthogonal (il conserve toujours la norme des vecteurs de F par exemple). En particulier f est bijective, et $f(F) = F$. Dès lors, pour tout $y \in F$ et $z \in F^\perp$, il existe $x \in F$ tel que $f(x) = y$ et

$$< y, f(z) >=< f(x), f(z) >=< x, z >= 0.$$

D'où $f(F^\perp) \subseteq F^\perp$. $\square$

2.1 Exemple : symétries orthogonales et réflexions

Rappelons qu'une symétrie s est orthogonale si c'est la symétrie par rapport à un sous-espace F dans la direction du sous-espace orthogonal $F^\perp$.

Proposition 12 *Une symétrie orthogonale est un endomorphisme orthogonale de E.*

Notons qu'en dépit du vocabulaire utilisé, une projection orthogonale (différente de l'identité) n'est en revanche pas un endomorphisme orthogonal (elle n'est même pas bijective !!).

Preuve. Soit donc s une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace F dans la direction du sous-espace orthogonal $F^\perp$. Pour montrer que $s \in O(E)$, on va montrer par exemple que s conserve la norme euclidienne. Pour cela soit $x \in E = F \oplus F^\perp$. Il existe $y \in F$ et $z \in F^\perp$ tels que $x = y + z$, et :

$$||s(x)|| = ||s(y + z)|| = ||y - z|| = ||y|| + ||z|| = ||y + z|| = ||x||$$

les troisièmes et quatrièmes égalités étant obtenues par application du théorème de Pythagore. $\square$

Définition 13 *On appelle **réflexion** de E toute symétrie orthogonale r par rapport à un hyperplan H de E (i.e. un sev H de E de dimension* $\dim(E) - 1$*).*

Remarque : Une réflexion r est un automorphisme orthogonal indirect. En effet si $(e_1, \cdots, e_{n-1})$ est une base de H et si $H^\perp = \text{Vect}(e_n)$ (où $n = \dim(E)$), alors $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_{n-1}, e_n)$ est une base de E dans laquelle la matrice de r est $\text{diag}(1, \cdots, 1, -1)$. Ainsi $\det(r) = -1$ et r est un endomorphisme orthogonal indirect.

Proposition 14 *Tout endomorphisme orthogonal de l'espace euclidien E est produit d'au plus* $\dim(E)$ *réflexions. En d'autres termes, le groupe orthogonal est engendré par les réflexions.*

Remarque : On a vu qu'une réflexion est de déterminant -1. Le nombre de réflexion intervenant dans la factorisation d'un automorphisme orthogonal f est donc

- pair si f est direct,
- impair si f est indirect.

Remarque : Dans le cas particulier où $\dim(E) = 2$, i.e. où E est un plan euclidien, un endomorphisme orthogonal est le produit de $0, 1$ ou 2 réflexions. Grâce à la remarque précédente, on obtient ainsi que :

- un automorphisme orthogonal indirect du plan euclidien est une réflexion,
- un automorphisme orthogonal direct du plan euclidien est le produit de 0 ou 2 réflexions.
  C'est l'identité dans le premier cas, une rotation dans le deuxième cas.

2.2 Matrices orthogonales

Définition 15 *Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite* ***orthogonale*** *si elle est inversible et si son inverse est $M^{-1} = {}^tM$, soit si*

$$^tM \cdot M = M \cdot {}^tM = I_n.$$

Remarque : On peut montrer qu'une matrice M est orthogonale si et seulement si les vecteurs colonnes de M (resp. les vecteurs lignes de M) forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. En pratique c'est plutôt cette caractérisation qu'on utilisera pour montrer qu'une matrice donnée est orthogonale.

Remarque : La relation $M \cdot {}^tM = I_n$ implique en particulier que $\det(M)^2 = 1$, soit $\det(M) = \pm 1$. Dès lors, on dira qu'une matrice orthogonale M est **directe** si $\det(M) = 1$, **indirecte** si $\det(M) = -1$.
On montre facilement que l'ensemble des matrices orthogonales forment un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, appelé **groupe orthogonal** et noté $O(n)$. Les matrices orthogonales directes en forment un sous-groupe, appelé **groupe spécial orthogonal** et noté $SO(n)$.

Proposition 16 *Un automorphisme f de l'espace euclidien E est orthogonal si et seulement si sa matrice en base orthonormale est orthogonale.*

Preuve. Si M est la matrice de f en bon, la matrice de l'adjoint f^* est ${}^tM$. Comme f est orthogonal si et seulement si $f \circ f^* = f^* \circ f = \mathrm{Id}_E$, on en déduit que f est orthogonal si et seulement si sa matrice M en bon vérifie ${}^tM \cdot M = M \cdot {}^tM = I_n$, et donc si et seulement si M est une matrice orthogonale. ☐

Proposition 17 *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Une base $\mathcal{B}'$ de E est orthonormale si et seulement si la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est orthogonale.*

Preuve. On note $P = (p_{i,j})_{i,j}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, de vecteurs colonne $C_1, \cdots, C_n$. On a pour tout élément e'_j de la base $\mathcal{B}'$:

$$e'_j = \sum_{1 \le k \le n} p_{k,j} e_k.$$

La base $\mathcal{B}'$ est orthonormale si et seulement si pour tout i, j,

$$< e'_i; e'_j > = \sum_{k,l=1}^{n} p_{k,i} p_{k,j} < e_i; e_j > = \sum_{k,l=1}^{n} p_{k,i} p_{k,j} = < C_i; C_j > = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j, \\ 1 \text{ si } i = j. \end{cases}$$

Ainsi la base $\mathcal{B}'$ est orthonormale si et seulement si les colonnes $C_1, \cdots, C_n$ de P forment une bon de $\mathbb{R}^n$, donc si et seulement si P est orthogonale. ☐

Définition 18 *On dit que E est* ***orienté*** *lorsqu'on a convenu qu'une certaine bon $\mathcal{B}$ de E est directe, et on dit alors qu'une autre bon $\mathcal{B}'$ de E est :*

- ***directe*** *si la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est de déterminant 1.*
- ***indirecte*** *si la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est de déterminant -1.*

3 Réduction des automorphismes orthogonaux

3.1 Automorphismes orthogonaux du plan euclidien P

On considère la matrice d'ordre deux

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Elle est orthogonale si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une bon, i.e. si

$$a^2 + c^2 = 1, \ b^2 + d^2 = 1, \ ac + bd = 0.$$

Les deux premières conditions sont remplies si et seulement s'il existe α, β tels que

$$a = \cos(\alpha), \ c = \sin(\alpha), \ b = \cos(\beta), \ d = \sin(\beta).$$

La troisième condition est alors remplie si et seulement si $\cos(\alpha)\cos[\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(\alpha - \beta) = 0$, soit si $\beta - \alpha = \pm\frac{\pi}{2}[2\pi]$. On obtient donc deux types de matrices orthogonales d'ordre deux :

- si $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}[2\pi]$, ce sont les matrices orthogonales directes :

$$A_+(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

- $\beta - \alpha = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$, ce sont les matrices orthogonales directes :

$$A_+(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Remarque : Par utilisations des formules trigonométriques donnant $\cos(\alpha+\beta)$ et $\sin(\alpha+\beta)$, on montre que

$$A_+(\alpha)A_+(\beta) = A_+(\alpha+\beta).$$

En particulier on en déduit que

- l'inverse de $A_+(\alpha)$ est $A_+(-\alpha)$ (puisque $A_+(0) = I_2$).
- le groupe $SO(2)$ est commutatif car $A_+(\alpha)A_+(\beta) = A_+(\alpha+\beta) = A_+(\beta)A_+(\alpha)$.

Théorème 19 *Dans un plan euclidien P, un automorphisme orthogonal est :*

- *une rotation s'il est direct, et sa matrice en bon est du type :*

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

- *une réflexion s'il est indirect, et sa matrice en bon est du type :*

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Remarque : Supposons P orienté. La matrice d'une rotation $A_+(\theta)$ est invariante par changement de base orthonormale direct. En effet la matrice de passage d'une bond à une bond est de la forme $A_+(\alpha)$, et :

$$A_+(\alpha)^{-1}A_+(\theta)A_+(\alpha) = A_+(\theta)A_+(\alpha)^{-1}A_+(\alpha) = A_+(\theta)$$

car le groupe $SO(2)$ est commutatif. Ainsi la matrice d'une rotation est la même dans toutes les bond, ce qui justifie la définition suivante.

Définition 20 *On considère une rotation f du plan enclidien orienté P. Alors il existe un unique $\theta \in \mathbb{Z}/2\pi\mathbb{Z}$ appelé* ***mesure de la rotation*** *f, tel qu'on ait dans toute bond :*

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

On applique ces résultats à la notion d'angles orientés du plan euclidien.

Proposition 21 *On considère un couple (u, v) de vecteurs unitaires de P. Il existe une et une seule rotation f telle que $f(u) = v$.*

Définition 22 *Soient deux vecteurs unitaires u, v du plan euclidien orienté P. On sait qu'il existe une unique rotation f telle que $f(u) = v$.*
On appelle ***angle orienté*** *$\overline{(u, v)}$ l'ensemble de tous les couples de vecteurs unitaires de la forme $(u_1, f(u_1))$.*
On appelle ***mesure de l'angle orienté*** *$\overline{(u, v)}$ la mesure de la rotation f.*

3.2 Automorphismes orthogonaux en dimension 3

Théorème 23 *Pour tout automorphisme orthogonal f d'un espace euclidien E de dimension 3, il existe un réel θ et une bon $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ dans laquelle on a :*

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

L'élément situé en position $(3, 3)$ est égal à 1 si f est direct, -1 si f est indirect.

3.2.1 Automorphismes orthogonaux directs

Soit f un automorphisme orthogonal direct de E de dimension 3. On sais qu'il existe une bon $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ dans laquelle on a :

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On déduit à partir de l'expression de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ que :

- le vecteur e_3 est laissé invariant par f, et que le sous-espace propre $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est la droite $\mathrm{Vect}(e_3)$.
- Le plan $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ orthogonal à e_3 est stable par f qui y induit un automorphisme de matrice dans la base $e_1, e_2)$
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

C'est la matrice d'une rotation : f induit sur $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ une rotation de mesure θ (qui dépend de l'orientation de l'axe de la rotation !).

Définition 24 *Soit $f \neq \mathrm{Id}_E$ une rotation d'un espace euclidien de dimension 3.*

- *La rotation f admet la valeur propre 1 avec l'ordre de multiplicité 1. On appelle* ***axe de la rotation*** *f la droite invariante associée $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$.*
- *La rotation f induit une rotation sur le plan orthogonal à $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$. On appelle* ***mesure de la rotation*** *f la mesure de la rotation induite sur ce plan (lorsque ce plan a été orienté à l'aide d'une orientation de l'axe de la rotation f).*

Remarque : Pour étudier un automorphisme orthogonal direct en dimension 3, on procèdera de la façon suivante :

1. On cherchera $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$, axe de la rotation f. On en fixera un vecteur unitaire e_3, et donc en particulier une orientation.
2. On déterminera une bon (e_1, e_2) de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)^\perp$, de sorte que la bon (e_1, e_2, e_3) soit direct.
3. On détermine la mesure de la rotation en utilisant la formule
$$\mathrm{Tr}(f) = 1 + 2\cos(\theta).$$
On obtient ainsi $\theta[2\pi]$ au signe près. Pour déterminer ce signe, on remarquera que
$$f(e_1) = cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2.$$
Le signe de $\sin(\theta)$ donne le signe de θ.

3.2.2 Automorphismes orthogonaux indirects en dimension 3

Soit f un automorphisme orthogonal indirect de l'espace euclidien E de dimension 3. On sait alors qu'il existe un réel θ et une bon $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ dans laquelle on a :

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

C'est la composée commutative d'une rotation et d'une réflexion par rapport au plan orthogonal à l'axe de la rotation. On remarque en particulier que, si $f \neq -\mathrm{Id}_E$, l'axe de la rotation est le sous-espace propre associé à -1. On a ainsi :

Proposition 25 *Dans un espace euclidien de dimension 3,*

- *les automorphismes orthogonaux directs f sont les rotations. Si $f \neq \mathrm{Id}_E$, l'axe de la rotation est le sous-espace propre associé à 1.*
- *les automorphismes orthogonaux indirects f sont les composées commutatives des rotations et des réflexions par rapport au plan orthogonal à son axe. Si $f \neq \mathrm{Id}_E$, l'axe de la rotation est le sous-espace propre associé à 1.*

4 Endomorphismes symétriques

Définition 26 *Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E. On dit que f est* **symétrique** *ou* **auto-adjoint** *s'il vérifie l'une des deux conditions suivantes :*

- $\forall x, y \in E, < f(x), y >=< x, f(y) >$,
- *l'adjoint de f est égal à f, soit $f^* = f$.*

Proposition 27 *Un endomorphisme f d'un espace euclidien E est symétrique si et seulement si sa matrice* <u>*en base orthonormale*</u> *est symétrique.*

Remarque : Ainsi l'ensemble des endomorphismes symétriques de E est un espace vectoriel de dimension égale à celle de l'espace des matrices symétriques, soit $\frac{\dim(E)(\dim(E)+1)}{2}$.

Proposition 28 *Soit f un endomorphisme symétrique. Alors ses valeurs propres sont réelles.*
En d'autres termes, les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle sont réelles.

Preuve. On se fixe une bon $\mathcal{B}$ et on note M la matrice de f dans cette base. En particulier M est symétrique dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qu'on peut considérer comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M, $X \in \mathbb{C} - \{0_n\}$ un vecteur propre associé. On a $MX = \lambda X$. En multipliant par ${}^t\overline{X}$, on obtient

$$ {}^t\overline{X}MX = \lambda\, {}^t\overline{X}X = \lambda||X||^2. $$

En transposant et en conjuguant cette égalité, il vient

$$ {}^t\overline{X}\, {}^t\overline{M}X = \overline{\lambda}\, {}^t\overline{X}X = \overline{\lambda}||X||^2. $$

Or M est symétrique réelle, donc ${}^t\overline{M} = M$, et on en déduit que $\lambda||X||^2 = \overline{\lambda}||X||^2$, soit $\lambda = \overline{\lambda}$ puisque $||X||^2 \neq 0$.
□

Proposition 29 *Soit f un endomorphisme symétrique. Alors ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.*

Preuve. Soient $\lambda \neq \mu$ deux valeurs propres distinctes de f, E_λ et E_μ les sous espaces propres associés. Pour tout $v \in E_\lambda, w \in E_\mu$,

$$ \lambda < v, w >=< f(v), w >=< v, f(w) >= \mu < v, w > $$

où l'on utilise que f est symétrique pour la deuxième inégalité. Ainsi $(\lambda - \mu) < v, w >= 0$ et donc $< v, w >= 0$ puisque $\lambda \neq \mu$. □

Théorème 30 *Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. Alors f diagonalise en base orthonormale.*
En d'autres termes, si M est une matrice symétrique réelle, il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}MP = {}^tPMP$ est diagonale.

Preuve. Considérons

$$ S = \oplus_{\lambda \in Sp(f)} \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E) $$

la somme des sous-espaces propres de f. Notons que nous avons déjà montré que ces sous-espaces sont deux à deux orthogonaux. Pour montrer que f est diagonalisable, on va montrer que $S = E$.
S étant la somme des sous-espaces propres de f, S est stable par f. On a alors montré que $F^\perp$ est stable par $f^* = f$. Ainsi f induit sur $F^\perp$ un endomorphisme qui vérifie toujours $f^* = f$, donc qui est symétrique. Mais alors si $F^\perp \neq \{0_E\}$, f admet une valeur propre réelle et donc un vecteur propre v associé. Mais alors $v \in S^\perp$, et par définition de S on a aussi $v \in S$. Ainsi $v \in S \cup S^\perp = \{0_E\}$ et est nul, ce qui est impossible car v est un vecteur propre.
Finalement $S = E$, et E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de f. Enfin la réunion des bon de chacun des sous-espaces propres de f est une bon de vecteurs propres de f. □

Définition 31 *On considère un endomorphisme f symétrique de l'espace euclidien E. On dit que f est :*

- ***positif*** *si :* $\forall v \in E, < v; f(v) > \geq 0$,
- ***défini positif*** *si :* $\forall v \in E - \{0_E\}, < v; f(v) > > 0$.

De même on dira qu'une matrice symétrique réelle M est

- ***positive*** *si :* $\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \ {}^tXMX\ \geq 0,$
- ***définie positive*** *si :* $\forall X \in \mathbb{R}^n - \{0_n\},\ \ {}^tXMX\ > 0.$

En particulier un endomorphisme symétrique f est positif ou défini positif si sa matrice en bon est symétrique positive ou symétrique définie positive.

Proposition 32 *Si f est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien E,*

- *f est positif si et seulement si ses valeurs propres sont positives,*
- *f est définie positif si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.*

Preuve. Supposons que f est symétrique positif (resp. défini positif). Pour toute valeur propre λ, pour tout vecteur propre v associé, on a

$$< v; f(v) >=< v; \lambda v >= \lambda ||v||^2.$$

Comme $< v; f(v) > \geq 0$ (resp. > 0) on en déduit que $\lambda \geq 0$ (resp. > 0).
Réciproquement supposons que les valeurs propres de l'endomorphisme symétrique f sont positives. Comme f est symétrique, il diagonalise dans une bon $(e_1, \cdots, e_n)$ et :

$$< x; f(x) >=< x_1e_1 + \cdots + x_ne_n; \lambda_1x_1e_1 + \cdots + \lambda_nx_ne_n >= \lambda_1x_1^2 + \cdots + \lambda_nx_n^2 \geq 0.$$

De plus si les valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont strictement positives, si x est non nul, alors on a $< x; f(x) >= \lambda_1x_1^2 + \cdots + \lambda_nx_n^2 > 0$, d'où le résultat annoncé. □