SESSION 2011

CAPES EXTERNE

MATHÉMATIQUES 2

Partie I - Cas d'un triangle équilatéral

1. (a) On sait que la courbe considérée est du genre ellipse si et seulement si $ab - c^2 > 0$. Ceci impose $ab > 0$ et en particulier $a \neq 0$ et $b \neq 0$.
Soit alors $\mathcal{E}$ une ellipse de centre O. Les abscisses intersection de $\mathcal{E}$ avec (Ox) sont les solutions de l'équation $ax^2+dx+f=0$. Ces solutions devant être opposées, leur somme à savoir $-\dfrac{d}{a}$ est nulle et donc $d = 0$. De même, l'étude de $\mathcal{E} \cap (Oy)$ fournit $e = 0$.

(b) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ puis $\mathcal{E}$ l'ensemble d'équation $ax^2 + by^2 + 2cxy + f = 0$.

$$(I, J, K) \in (\mathcal{E})^3 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a + f = 0 \\ \dfrac{a + 3b - 3c\sqrt{3}}{4} + f = 0 \\ \dfrac{a + 3b + 3c\sqrt{3}}{4} + f = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -f \\ 3b - 3c\sqrt{3} + 3f = 0 \\ 3b + 3c\sqrt{3} + 3f = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -f \\ b = -f \\ c = 0 \end{array}\right. .$$

Les éventuelles ellipses contenant I, J et K ont donc une équation de la forme $f(x^2 + y^2 - 1) = 0$, $f \neq 0$ ce qui équivaut à $x^2 + y^2 = 1$. Ceci assure l'unicité de $\mathcal{E}$.
Réciproquement, $x^2 + y^2 = 1$ est une équation du cercle circonscrit au triangle IJK qui convient.

2. On note $\mathscr{A}$ l'aire du triangle ABC, a la longueur d'un côté du triangle ABC et h une hauteur. On a $R = \dfrac{2h}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ et donc

$$\mathscr{A} = \frac{ah}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{3R}{2} \times R\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}.$$

3. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} \cos(y - x) = \cos x \\ \cos(y - x) = \cos y \end{array}\right. &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos y = \cos x \\ \cos(y - x) = \cos x \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/ \left\{\begin{array}{l} y = x + 2k\pi \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}/ \left\{\begin{array}{l} y = -x + 2k\pi \\ \cos(2x) = \cos(x) \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in (2\pi\mathbb{Z})^2 \text{ ou } \exists (k, k') \in \mathbb{Z}^2/ \left\{\begin{array}{l} y = -x + 2k\pi \\ 2x = x + 2k'\pi \end{array}\right. \text{ ou } \exists (k, k') \in \mathbb{Z}^2/ \left\{\begin{array}{l} y = -x + 2k\pi \\ 2x = -x + 2k'\pi \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in (2\pi\mathbb{Z})^2\ \exists (k, k') \in \mathbb{Z}^2/ \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{2k'\pi}{3} \\ y = -\dfrac{2k'\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions du système proposé est $(2\pi\mathbb{Z})^2 \cup \left\{\left(\dfrac{2k\pi}{3}, -\dfrac{2k\pi}{3} + 2k'\pi\right),\ (k, k') \in \mathbb{Z}^2\right\}$. Si de plus $0 < x < y < 2\pi$, on obtient un couple solution et un seul à savoir $\left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right)$.

4. (a) i. On note $\mathscr{A}$ l'aire du triangle ABC.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{array}{cc} R(\cos\beta - 1) & R(\cos\gamma - 1) \\ R\sin\beta & R\sin\gamma \end{array}\right| = \frac{R^2}{2}(\sin\gamma\cos\beta - \cos\gamma\sin\beta - \sin\gamma + \sin\beta) \\
&= \frac{R^2}{2}(\sin(\gamma - \beta) - \sin\gamma + \sin\beta).
\end{aligned}$$

ii. Soit $T = \{(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \leqslant \beta \leqslant \gamma \leqslant 2\pi\}$. T est une intersection de trois demi-plans fermés (à savoir $P_1 = \{(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \leqslant \beta\}$, $P_2 = \{(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 / \ \beta \leqslant \gamma\}$ et $P_3 = \{(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 / \ \gamma \leqslant 2\pi\}$) et donc T est un fermé de $\mathbb{R}^2$. De plus T est borné car $\forall (\beta, \gamma) \in T^2$, $\|(\beta, \gamma)\|_\infty \leqslant 2\pi$. D'après le théorème de BOREL-LEBESGUE, T est un compact de $\mathbb{R}^2$.
L'application f est continue sur ce compact à valeurs dans $\mathbb{R}$ et donc f admet sur T un minimum et un maximum. Le minimum de T est bien sûr 0 et est atteint en tout point du bord de T (quand $\beta = 0$ ou $\gamma = 2\pi$ ou $\beta = \gamma$) et puisque f n'est pas la fonction nulle, le maximum de f est atteint à l'intérieur de T c'est-à-dire en un point (β_0, γ_0) tel que $0 < \beta_0 < \gamma_0 < 2\pi$.

iii. La fonction f est de classe C^1 sur l'intérieur de T qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Donc le point (β_0, γ_0) est un point critique de f. Or, pour $(\beta, \gamma) \in (\overset{\circ}{T})^2$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \beta}(\beta, \gamma) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \gamma}(\beta, \gamma) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\gamma - \beta) = \cos\beta \\ \cos(\beta - \gamma) = \cos\gamma \end{cases} \Leftrightarrow (\beta, \gamma) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right) \text{ d'après la question 3.}$$

Donc f atteint son maximum en un unique point (β_0, γ_0) de T à savoir $(\beta_0, \gamma_0) = \left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right)$. Le triangle ABC correspondant est équilatéral.

(b) D'après la question 2., l'aire maximale d'un triangle inscrit dans $\mathcal{C}$ est $\dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

Reamarque. $f(\beta_0, \gamma_0) = \dfrac{R^2}{2}\left(\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) + \sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right) = \dfrac{3R^2}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

$$\boxed{\text{L'aire maximale d'un triangle inscrit dans } \mathcal{C} \text{ est } \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}.}$$

5. $\mathcal{A}_\mathcal{C} = \pi R^2$ et donc $\dfrac{\mathcal{A}_\mathcal{C}}{\mathcal{A}_\mathcal{T}} \geqslant \dfrac{\pi R^2}{\dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ avec égalité si et seulement si ABC est équilatéral.

6. Soit $\mathcal{E}$ une ellipse circonscrite au triangle $\mathcal{T}_0 = IJK$. Il existe une affinité orthogonale f transformant $\mathcal{E}$ en un cercle $\mathcal{C}$. L'affinité f transforme le triangle $\mathcal{T}_0$ en un triangle $\mathcal{T} = ABC$ inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$. Puisqu'une affinité orthogonale conserve les rapports d'aires, on a

$$\frac{\mathcal{A}_\mathcal{E}}{\mathcal{A}_{\mathcal{T}_0}} = \frac{\mathcal{A}_\mathcal{C}}{\mathcal{A}_\mathcal{T}} \geqslant \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}, \ (*)$$

et donc $\mathcal{A}_\mathcal{E} \geqslant \dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}\mathcal{A}_{\mathcal{T}_0} = \pi$ (d'après la question 3.). Maintenant, le cercle $\mathcal{C}_0$ circonscrit au triangle IJK est une ellipse circonscrite à ce triangle d'aire π et donc fournissant un cas d'égalité de l'inégalité précédente. Par suite, il existe au moins une ellipse circonscrite au triangle IJK d'aire minimale à savoir le cercle circonscrit au triangle IJK.

Maintenant, d'après la question 5., l'inégalité $(*)$ est une égalité si et seulement si le triangle ABC est aussi équilatéral. Ceci équivaut au fait que f est une similitude. Une affinité orthogonale qui est aussi une similitude est une homothétie et donc $\mathcal{E}$ est nécessairement un cercle, circonscrit au triangle IJK c'est-à-dire le cercle circonscrit au triangle IJK. Ceci montre l'unicité de l'ellipse $\mathcal{E}$.

Partie II - Etude de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

1. Soit $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. Déjà, D est une matrice symétrique réelle.
Soient $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (]0, +\infty[)^n$ puis $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Soit $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a

$$^tXDX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geqslant 0,$$

avec égalité si et seulement si $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i x_i^2 = 0$ ce qui équivaut à $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = 0$. Donc $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $^tXDX > 0$ ou encore $D \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

2. (a) Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On sait que les valeurs propres de A sont toutes réelles.
Soient λ une valeur propre de A puis X un vecteur propre associé. Alors

$$^tXAX = {}^tX(\lambda X) = \lambda\|X\|_2^2.$$

Puisque X n'est pas nul, on a $\|X\|_2^2 > 0$ puis $\lambda = \dfrac{{}^tXAX}{\|X\|_2^2} > 0$. On a montré que si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors toutes les valeurs propres de A sont des réels strictement positifs.

(b) Le théorème spectral affirme que toute matrice symétrique réelle est orthogonalement semblable à une matrice diagonale.

(c) Soit A une matrice symétrique réelle dont toutes les valeurs propres sont des réels strictement positifs. Il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale réelle D telle que $A = {}^tPDP$. Puisque A et D sont semblables, les valeurs propres de D sont les valeurs propres de A et sont donc des réels strictement positifs. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, d'après la question 1.,

$${}^tXAX = {}^tX{}^tPDPX = {}^t(PX)D(PX) \geqslant 0.$$

avec égalité si et seulement si $PX = 0$ ce qui équivaut à $X = 0$ puisque P est inversible. Ainsi, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$, ${}^tXAX > 0$ et donc $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

3. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. D'après ce qui précède, il existe une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ à coefficients réels strictement positifs et une matrice orthogonale P telles que $A = {}^tPDP$. Posons $D' = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$. Alors $D = D'^2 = {}^tD'D'$ puis $A = {}^tP{}^t(D')D'P = {}^t(D'P)D'P$.
Si on pose $Q = D'P$, alors $A = {}^tQQ$. Enfin, $\det(A)$ est le produit des valeurs propres de A et donc $\det(A) \neq 0$. Par suite, $(\det Q)^2 = \det({}^tQQ) = \det(A) \neq 0$ puis $\det(Q) \neq 0$ et donc $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

Réciproquement, soient $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ puis $A = {}^tQQ$. D'une part, ${}^tA = {}^tQ{}^t({}^tQ) = {}^tQQ = A$ et donc $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. D'autre part, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$${}^tXAX = {}^tX{}^tQQX = {}^t(QX)QX) = \|QX\|_2^2 \geqslant 0,$$

avec égalité si et seulement si $QX = 0$ ou encore $X = 0$ car Q est inversible. Donc $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, ${}^tXAX > 0$ puis $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})/\ A = {}^tQQ.}$$

4. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Les valeurs propres de A sont des réels strictement positifs et $\det(A)$ est le produit de ces valeurs propres. Donc $\det(A) > 0$.
La réciproque de ce résultat est fausse. Par exemple, la matrice $-I_2$ est symétrique réelle de déterminant strictement positif car égal à 1, mais les valeurs propres de $-I_2$ à savoir -1 et -1 ne sont pas des réels strictement positifs ou encore $-I_2 \notin \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.

5. Le résultat est acquis si $k = n$ ou si $n = 1$. Soient $n \geqslant 2$ puis $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Déjà la matrice A_k est symétrique. Vérifions que $\forall X \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, ${}^tXA_kX > 0$.
Soient $X \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ puis $Y = \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$. Y n'est pas nul et donc ${}^tYAY > 0$. Or

$${}^tYAY = \begin{pmatrix} {}^tX & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k & \times \\ \times & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tXA_k & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = {}^tXA_kX,$$

et donc ${}^tXA_kX = {}^tYAY > 0$. Ainsi, la matrice A_k est symétrique définie positive et donc d'après la question 4., $\det(A_k) > 0$.

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}),\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ \det(A_k) > 0.}$$

6. Il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A_n = {}^tQQ$. Par suite, puisque la matrice A est symétrique, la matrice A s'écrit sous la forme $A = \begin{pmatrix} {}^tQQ & C' \\ {}^tC' & \alpha \end{pmatrix}$ où $C' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $C = {}^tQ^{-1}C'$ de sorte que $C' = {}^tQC$ et ${}^tC' = {}^tCQ$. Alors

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} {}^tQ & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & C \\ {}^tC & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} {}^tQ & {}^tQC \\ {}^tC & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tQQ & {}^tQC \\ {}^tCQ & \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}^tQQ & C' \\ {}^tC' & \alpha \end{pmatrix} = A.\end{aligned}$$

7. (a) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. En notant $C_1, \ldots, C_{m+1}$ les colonnes de M, on a

$$\det(M) = \det(C_1, \dots, C_m, C_{m+1}) = \det\left(C_1, \dots, C_m, C_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k C_k\right)$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \times & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ \times & \dots & \dots & \times & \alpha - \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \alpha_k^2 \end{vmatrix} = \alpha - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^2.$$

(b) On suppose que $\det(M) = \alpha - \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \alpha_k^2 > 0$.

Soit $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant m+1} \in \mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} {}^tXMX &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant m+1} m_{i,j} x_i x_j = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \alpha x_{m+1}^2 + 2\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i x_{m+1} \\ &= \sum_{i=1}^{m} (x_i^2 + 2\alpha_i x_i x_{m+1}) + \alpha x_{m+1}^2 = \sum_{i=1}^{m} \left((x_i + \alpha_i x_{m+1})^2 - \alpha_i^2 x_{m+1}^2\right) + \alpha x_{m+1}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m} (x_i + \alpha_i x_{m+1})^2 + \left(\alpha - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2\right) x_{m+1}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m} (x_i + \alpha_i x_{m+1})^2 + \det(M) x_{m+1}^2 \geqslant 0, \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $\det(M)x_{m+1}^2 = 0$ et $\forall i \in [\![1, m]\!]$, $(x_i + \alpha_i x_{m+1})^2 = 0$ ou encore $x_{m+1} = 0 = x_1 = \ldots = x_m$ car $\det(M) \neq 0$.

Ainsi, $\forall X \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, ${}^tXMX > 0$ et $M \in \mathcal{S}_{m+1}^{++}(\mathbb{R})$.

8. D'après la question 5., on sait que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $(A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ \det(A_k) > 0)$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $(\forall k \in [\![1, n]\!],\ \det(A_k) > 0 \Rightarrow A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))$.

• Si $n = 1$, soit $A = (a) \in \mathcal{S}_1(\mathbb{R})$ telle que $\forall k \in [\![1, 1]\!],\ \det(A_k) > 0$. Alors $a = \det(A) = \det(A_1) > 0$. Mais alors pour $x \in \mathbb{R}^*$, ${}^t(x)A(x) = ax^2 > 0$ et donc $A \in \mathcal{S}_1^{++}(\mathbb{R})$.

• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $(\forall k \in [\![1, n]\!],\ \det(A_k) > 0 \Rightarrow A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))$.
Soit $A \in \mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $\forall k \in [\![1, n+1]\!],\ \det(A_k) > 0$. En particulier, $\det(A) = \det(A_{n+1}) > 0$. D'autre part, $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \det(A_k) > 0$ et donc, par hypothèse de récurrence, $A_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
D'après la question 6., il existe $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, $C = (\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$A = \begin{pmatrix} {}^tQ & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & C \\ {}^tC & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix}.$$

Posons $Q_1 = \begin{pmatrix} Q & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} I_n & C \\ {}^tC & \alpha \end{pmatrix}$. $\det(Q_1) = \det(Q) \neq 0$ et donc Q_1 est inversible. On a ainsi écrit la matrice A sous la forme $A = {}^tQ_1 M Q_1$ où Q_1 est une matrice inversible.
Ensuite, $\det(A) = \det({}^tQ_1)\det(M)\det(Q_1) = (\det(Q_1))^2 \det(M)$ et donc $\det(M) = \dfrac{\det(A)}{(\det(Q_1))^2} > 0$. La question 7.b) permet d'affirmer que la matrice M est définie positive.

D'après la question 3, il existe une matrice inversible Q_2 telle que $M = {}^tQ_2 Q_2$. Posons $Q_3 = Q_2 Q_1$. Q_3 est inversible en tant que produit de deux matrices inversibles et de plus $A = {}^tQ_1 {}^tQ_2 Q_2 Q_1 = {}^t(Q_2 Q_1) Q_2 Q_1 = {}^tQ_3 Q_3$. Mais alors, toujours d'après la question 3, A est définie positive.

Le résultat est démontré par récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ (\forall k \in [\![1, n]\!],\ \det(A_k) > 0 \Leftrightarrow A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})).}$$

9. On munit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ d'une norme quelconque. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on définit l'application $\varphi_k : \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{S}_k(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A_k \end{array}$.

Soit $k \in [\![1,n]\!]$. φ_k est linéaire. Puisque $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace de dimension finie, on en déduit que φ_k est continue sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathcal{S}_k(\mathbb{R})$. D'autre part, on sait que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_k(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \det(M) \end{array}$ est continue sur $\mathcal{S}_k(\mathbb{R})$. Par composition, on en déduit que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \det(A_k) \end{array}$ est continue sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Mais alors $\varphi_k^{-1}(]0,+\infty[)$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un ouvert de $\mathbb{R}$ par une application continue.

Maintenant, d'après la question 8., $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \bigcap_{1\leqslant k\leqslant n} \varphi_k^{-1}(]0,+\infty[)$ et donc $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'intersection d'un nombre fini d'ouverts de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ est un ouvert de } \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ muni d'une norme.}}$$

Partie III - Inclusion d'un compact dans un ellipsoïde

III.1 Réduction simultanée

1. • Φ_A est une application de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

• Soit $(X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$. Puisque $\Phi_A(X) \in \mathbb{R}$, $\Phi_A(Y,X) = {}^tYAX = {}^t({}^tYAX) = {}^tXAY = \Phi_A(X,Y)$. Donc Φ_A est symétrique.

• Soient $(X_1,X_2,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^3$ et $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\Phi_A(\lambda_1X_1+\lambda_2X_2,Y) = {}^t(\lambda_1X_1+\lambda_2X_2)AY = \lambda_1{}^tX_1AY + \lambda_2{}^tX_2AY = \lambda_1\Phi_A(X_1,Y)+\lambda_2\Phi_A(X_2,Y).$$

Donc Φ_A est linéaire par rapport à sa première variable puis bilinéaire par symétrie.

• Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\Phi_A(X,X) = {}^tXAX > 0$. Donc Φ_A est définie positive.

En résumé, Φ_A est une forme bilinéaire symétrique définie positive et donc Φ_A est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

2. Notons C_1, ..., C_n les colonnes de P et $(AP)_1$, ..., $(AP)_n$ les colonnes de AP. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, le coefficient ligne i, colonne j de ${}^tPAP$ est

$${}^tC_i(AP)_j = {}^tC_iAC_j = \Phi_A(C_i,C_j) = \delta_{i,j},$$

qui est également le coefficient ligne i, colonne j de la matrice I_n. Donc ${}^tPAP = I_n$.

3. Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. De plus, pour $(X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$,

$$\begin{aligned}\Phi_A(f(X),Y) &= {}^t(f(X))AY = {}^t(A^{-1}BX)AY = {}^tX{}^tB{}^tA^{-1}AY = {}^tXBA^{-1}AY = {}^tXBY = {}^tXAA^{-1}BY \\ &= \Phi_A(X,f(Y)).\end{aligned}$$

Donc Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, symétrique pour le produit scalaire Φ_A.

La matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est bien sûr $A^{-1}B$.

Remarque. La matrice $A^{-1}B$ n'est pas nécessairement symétrique.

4. Puisque Φ_A est symétrique pour le produit scalaire Φ_A, d'après le théorème spectral, il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, orthonormée pour le produit scalaire Φ_A, dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale D.
Soit P la matrice carrée dont les colonnes sont les vecteurs de cette base orthonormale. P est donc la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$. D'après la question 2., ${}^tPAP = I_n$ ou encore $A = {}^tQQ$ où $Q = P^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$. Maintenant, les formules de changement de bases fournissent $D = P^{-1}A^{-1}BP = QQ^{-1}{}^tQ^{-1}BQ^{-1} = {}^tQ^{-1}BQ^{-1}$ et donc $B = {}^tQBQ$.

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}),\ \forall B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ \exists Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}),\ \exists D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})/\ A = {}^tQQ \text{ et } B = {}^tQDQ.}$$

Les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de $A^{-1}B$ qui en particulier sont des réels.

5. (a) Soient A et B deux éléments de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tels que $\mathcal{E}_A \subset \mathcal{E}_B$.
Soient λ une valeur propre de $A^{-1}B$ et X un vecteur propre associé. Alors, $A^{-1}BX = \lambda X$ puis $BX = \lambda AX$ puis ${}^tXBX = \lambda{}^tXAX$. Maintenant, X est non nul et donc on en déduit déjà que ${}^tXAX > 0$ et ${}^tXBX > 0$ puis $\lambda = \dfrac{{}^tXBX}{{}^tXAX} > 0$. D'autre part,

$$\lambda = \frac{\Phi_B(X)}{\Phi_A(X)} = \Phi_B\left(\frac{X}{\sqrt{\Phi_A(X)}}\right).$$

Maintenant, $\Phi_A\left(\frac{X}{\sqrt{\Phi_A(X)}}\right) = \frac{\Phi_A(X)}{\Phi_A(X)} = 1$ et donc $\frac{X}{\sqrt{\Phi_A(X)}} \in \mathcal{E}_A$. Mais alors $\frac{X}{\sqrt{\Phi_A(X)}} \in \mathcal{E}_B$ ou encore $\lambda = \Phi_B\left(\frac{X}{\sqrt{\Phi_A(X)}}\right) \leqslant 1$.

$$\boxed{\forall (A, B) \in (\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))^2,\ \mathcal{E}_A \subset \mathcal{E}_B \Rightarrow \mathrm{Sp}(A^{-1}B) \subset]0, 1].}$$

(b) Si de plus $\mathcal{E}_B \subset \mathcal{E}_A$, les valeurs propres de $B^{-1}A = (A^{-1}B)^{-1}$ sont inférieures ou égales à 1 (et strictement positives). Puisque ces valeurs propres sont les inverses des valeurs propres de $A^{-1}B$, les valeurs propres de $A^{-1}B$ sont aussi supérieurs ou égales à 1 et finalement, les valeurs propres de $A^{-1}B$ sont égales à 1. On en déduit que $A^{-1}B$ est semblable à I_n et donc égale à I_n puis que $A = B$.

$$\boxed{\forall (A, B) \in (\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))^2,\ \mathcal{E}_A = \mathcal{E}_B \Leftrightarrow A = B.}$$

III.2 Convexité

1. Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux parties convexes de E. Si $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \varnothing$, alors $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ est convexe. Sinon, soient $(u_1, u_2) \in (\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)^2$ et $t \in [0, 1]$.
u_1 et u_2 sont dans $\mathcal{C}_1$ et donc $tu_1 + (1-t)u_2$ est dans $\mathcal{C}_1$. De même, $tu_1 + (1-t)u_2$ est dans $\mathcal{C}_2$ et finalement $tu_1 + (1-t)u_2$ est dans $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$.

Dans tous les cas, on a montré que $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ est convexe.

2. (a) L'application φ est continue sur le compact $\mathcal{C}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Donc φ admet un minimum et un maximum sur $\mathcal{C}$. Supposons que le minimum de φ soit atteint en deux points distincts u_1 et u_2 de $\mathcal{C}$. Alors, $\varphi\left(\frac{1}{2}(u_1 + u_2)\right) < \frac{1}{2}\varphi(u_1) + \frac{1}{2}\varphi(u_2) = \varphi(u_1)$ ce qui contredit le fait que $\varphi(u_1)$ est le minimum de φ. Donc φ atteint son minimum en un unique point de $\mathcal{C}$.

(b) On a déjà dit que φ admet un maximum.

On note D le disque unité de $\mathbb{R}^2$. L'application $\varphi \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \sqrt{x^2 + y^2} \end{array}$ est strictement convexe sur D (d'après l'inégalité triangulaire) et D est un compact convexe de $\mathbb{R}^2$. De plus, φ atteint son maximum en tout point du bord de D et donc en une infinité de points. Il est donc possible qu'une application strictement convexe sur un convexe compact atteigne son maximum en un nombre infini de points.

III.3 Volume d'un ellipsoïde

1. Déterminons k_2. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique de sorte que la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ est orthormée. Soit $A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$. On considère l'ellipse (e) d'équation ${}^tXAX = 1$. On sait que le théorème spectral permet de réduire la forme quadratique $X \mapsto {}^tXAX$ en base orthonormée et plus précisément qu'il existe une base orthonormée de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ dans laquelle (e) a pour équation $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 1$ où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de A.
Maintenant, on sait que « l'aire d'une ellipse » est πab où a et b sont le demi petit axe et le demi grand axe de cette ellipse. Comme a et b sont $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$ et $\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$, l'aire de l'ellipse est encore $\frac{\pi}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\det(A)}}$. Donc $k_2 = \pi$.

De même en dimension 3, le volume de l'ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ en base orthonormée est $\frac{4\pi}{3}abc$ et donc $k_3 = \frac{4\pi}{3}$.

$$\boxed{k_2 = \pi \text{ et } k_3 = \frac{4\pi}{3}.}$$

2. Soient A et B deux élément de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tels que $\mathcal{E}_A \subset \mathcal{E}_B$. D'après la question III.1.3., les valeurs propres de la matrice $A^{-1}B$ sont réelles et d'après la question III.1.5.(b), ces valeurs propres sont des réels strictement positifs et inférieurs à 1. Le déterminant de $A^{-1}B$ qui est le produit de ces valeurs propres est donc inférieur à 1 puis, comme $\det(A) > 0$ et $\det(B) > 0$

$$\det(A^{-1}B) \leqslant 1 \Rightarrow \frac{\det(B)}{\det(A)} \leqslant 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\det(A)}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\det(B)}} \Rightarrow \nu(A) \leqslant \nu(B).$$

3. L'application $d : A \mapsto \det(A)$ est continue sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ et l'application $r : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Donc, par composition, l'application $\nu = r \circ d$ est continue sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

4. (a) Soit $t \in]0, 1[$. Pour $\lambda \in]0, +\infty[$, posons $\psi(\lambda) = \ln(t + (1-t)\lambda) - (1-t)\ln\lambda$. Pour tout $\lambda > 0$, on a $t + (1-t)\lambda > 0$ et donc ψ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et de plus, pour $\lambda > 0$,

$$\psi'(\lambda) = \frac{1-t}{t + (1-t)\lambda} - \frac{1-t}{\lambda} = \frac{t(1-t)(\lambda-1)}{t + (1-t)\lambda}.$$

La fonction ψ' est strictement négative sur $]0, 1[$ et strictement positive sur $]1, +\infty[$. Donc la fonction ψ admet un minimum local strict en 1 et ce minimum est $\psi(1) = \ln(t + 1 - t) - (1-t)\ln(1) = 0$. Donc la fonction ψ est strictement positive sur $]0, +\infty[\setminus\{1\}$ et s'annule en 0 ou encore $\forall \lambda \in]0, +\infty[$, $\ln(t + (1-t)\lambda) \geqslant (1-t)\lambda$ avec égalité si et seulement si $\lambda = 1$.

Remarque. On sait que la fonction ln est strictement concave sur $]0, +\infty[$.

(b) De même, la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée seconde est positive sur $\mathbb{R}$ et donc pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et tout $t \in [0, 1]$, $e^{ta+(1-t)b} \leqslant te^a + (1-t)e^b$.

(c) i. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et soit $t \in [0, 1]$. Tout d'abord, on sait que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et en particulier que $tA + (1-t)B$ est une matrice symétrique réelle. Ensuite, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$${}^tX(tA + (1-t)B)X = t\,{}^tXAX + (1-t)\,{}^tXBX \geqslant 0,$$

avec égalité si et seulement si $t\,{}^tXAX = (1-t)\,{}^tXBX = 0$. Comme t et $1-t$ ne sont pas tous deux nuls, ceci impose ${}^tXAX = 0$ ou ${}^tXBX = 0$ et donc $X = 0$. Par suite, $tA + (1-t)B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ est un convexe de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

ii. Soient $(A, B) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))^2$ et $t \in]0, 1[$. Avec les notations de la question III.1.4. et en posant $D = \text{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, on a $\det(A) = \det({}^tQQ) = (\det(Q))^2$ puis $\det(B) = \det({}^tQDQ) = (\det(Q))^2\det(D) = (\det(Q))^2 \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ et enfin

$$\det(tA + (1-t)B) = \det({}^tQ(tI_n + (1-t)D)Q) = (\det(Q))^2\det(tI_n + (1-t)D) = (\det(Q))^2 \prod_{i=1}^{n}(t + (1-t)\lambda_i).$$

iii. On suppose de plus $A \neq B$. Par suite, $D \neq I_n$ et donc l'un au moins des λ_i n'est pas égal à 1.
D'après la question 4.(a), pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, $\ln(t + (1-t)\lambda_i) \geqslant (1-t)\ln\lambda_i$, l'une au moins de ces inégalités étant stricte.
En additionnant ces inégalités, on obtient $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \ln(t + (1-t)\lambda_i) > (1-t)\sum_{i=1}^{n} \ln(\lambda_i$ puis $-\dfrac{1}{2}\ln\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(t + (1-t)\lambda_i)\right) < -\dfrac{1}{2}(1-t)\ln\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right)$. En prenant l'exponentielle des deux membres et en utilisant la question 4.(b), on en déduit que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(t + (1-t)\lambda_i)}} &= \exp\left(-\frac{1}{2}\ln\left(\prod_{i=1}^{n}(t + (1-t)\lambda_i)\right)\right) \\
&< \exp\left(-\frac{1}{2}(1-t)\ln\left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\right) = \exp\left(t \times 0 + (1-t)\left(-\frac{1}{2}\right)\ln\left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\right) \\
&\leqslant t\exp(0) + (1-t)\exp\left(-\frac{1}{2}\ln\left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\right) = t + (1-t)\frac{1}{\sqrt{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\lambda_i}}
\end{aligned}$$

En résumé, $\dfrac{1}{\sqrt{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(t+(1-t)\lambda_i)}} < t+(1-t)\dfrac{1}{\sqrt{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\lambda_i}}$. On multiplie alors les deux membres de cette inégalité par le réel strictement positif $\dfrac{1}{\det Q}$ et on obtient $\dfrac{1}{\sqrt{(\det Q)^2\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(t+(1-t)\lambda_i)}} < \dfrac{t}{\sqrt{(\det Q)^2}}+(1-t)\dfrac{1}{\sqrt{(\det Q)^2\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\lambda_i}}$ ou encore $\dfrac{1}{\sqrt{\det(tA+(1-t)B)}} < \dfrac{t}{\sqrt{\det A}}+\dfrac{1-t}{\sqrt{\det B}}$ ou enfin $\nu(tA+(1-t)B) < t\nu(A)+(1-t)\nu(B)$. On a montré que

$$\boxed{\text{la fonction } \nu \text{ est strictement convexe sur } \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).}$$

5. Soit $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}X\in\mathcal{E}_A &\Leftrightarrow {}^tXAX\leqslant 1\Leftrightarrow {}^t(M^{-1}MX)A(M^{-1}MX)\leqslant 1\Leftrightarrow {}^t(MX)({}^tM^{-1}AM^{-1})(MX)\leqslant 1\\ &\Leftrightarrow MX\in\mathcal{E}_B \text{ où } B={}^tM^{-1}AM^{-1}.\end{aligned}$$

Maintenant, B est symétrique réelle car ${}^tB={}^tM^{-1}\,{}^tA\,{}^t({}^tM^{-1})={}^tM^{-1}AM^{-1}=B$. De plus, pour $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$${}^tXBX={}^tX{}^tM^{-1}AM^{-1}X={}^t(M^{-1}X)A(M^{-1}X)\geqslant 0,$$

avec égalité si et seulement si $M^{-1}X=0$ ou encore $X=0$. Donc B est un élément de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{E}_B=M(\mathcal{E}_A)$. D'après la question III.1.5.(b), B est unique.

Notons $V(\mathcal{E})$ le volume d'un ellipsoïde $\mathcal{E}$. Alors,

$$V(\mathcal{E}_B)=\frac{k_n}{\sqrt{\det(B)}}=\frac{k_n}{\sqrt{(\det(M^{-1}))^2\det(A)}}=\det(M)\frac{k_n}{\sqrt{\det(A)}}=\det(M)V(\mathcal{E}_A).$$

III.4 Inclusion dans un ellipsoïde

1. (a) On note N_A la norme associée au produit scalaire Φ_A. Soient $(X,Y)\in(\mathcal{E}_A)^2$ et $t\in[0,1]$.

$$\sqrt{{}^t(tX+(1-t)Y)A(tX+(1-t)Y)}=N_A(tX+(1-t)Y)\leqslant tN_A(X)+(1-t)N_A(Y)\leqslant t+1-t=1$$

et donc ${}^t(tX+(1-t)Y)A(tX+(1-t)Y)\leqslant 1$ ou encore $tX+(1-t)Y\in\mathcal{E}_A$.

(b) Soit $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $X\in\mathcal{E}_A\Rightarrow {}^tXAX\leqslant 1\Rightarrow {}^t(-X)A(-X)\leqslant 1\Rightarrow -X\in\mathcal{E}_A$.

(c) Soit $X\in B(0,\varepsilon)$. X_0+X est dans $B(X_0,\varepsilon)$ et donc dans $\mathcal{E}_A$. De même, $-X$ est dans $B(0,\varepsilon)$ et donc X_0-X est dans $\mathcal{E}_A$. D'après la question précédente, $-X_0+X$ est aussi dans $\mathcal{E}_A$. Enfin, puisque $\mathcal{E}_A$ est convexe, $\dfrac{1}{2}(X_0+X)+\dfrac{1}{2}(-X_0+X)=X$ est dans $\mathcal{E}_A$. Finalement,

$$\boxed{B(0,\varepsilon)\subset\mathcal{E}_A.}$$

(d) Soient λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. Alors $X_0=\dfrac{\varepsilon X}{\|X\|}$ est dans $B(0,\varepsilon)$ et donc dans $\mathcal{E}_A$. On en déduit que $N_A(X_0)^2\leqslant 1$. Maintenant,

$$N_A(X_0)^2={}^t\left(\frac{\varepsilon X}{\|X\|}\right)A\left(\frac{\varepsilon X}{\|X\|}\right)=\frac{\varepsilon^2}{\|X\|^2}{}^tXAX=\frac{\varepsilon^2}{\|X\|^2}{}^tX(\lambda X)=\lambda\varepsilon^2.$$

Par suite, $\lambda\varepsilon^2\leqslant 1$ et donc $\lambda\leqslant\dfrac{1}{\varepsilon^2}$.

(e) Soit λ la plus grande valeur propre de A. Puisque les valeurs propres de A sont positives, λ^2 est la plus grande valeur propre de A^2.

Puisque A^2 est une matrice symétrique, on sait que $\sup\limits_{X\neq 0}\dfrac{{}^tXA^2X}{{}^tXX}=\lambda^2$. Maintenant, $\sup\limits_{X\neq 0}\dfrac{{}^tXA^2X}{{}^tXX}=\sup\limits_{X\neq 0}\dfrac{{}^t(AX)AX}{{}^tXX}=\sup\limits_{X\neq 0}\dfrac{\|AX\|^2}{\|X\|^2}=|||A|||^2$. Donc, $|||A|||=\lambda\leqslant\dfrac{1}{\varepsilon^2}$.

2. K est un compact de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et donc est une partie bornée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Par suite, il existe un réel $R>0$ tel que $K\subset B(0,R)$. Maintenant, pour $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$X \in B(0,R) \Leftrightarrow {}^tXX \leqslant R^2 \Leftrightarrow {}^tX\frac{1}{R^2}I_nX \leqslant 1 \Leftrightarrow X \in \mathcal{E}_{\frac{1}{R^2}I_n} \text{ avec } \frac{1}{R^2}I_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).$$

Par suite, il existe au moins un ellipsoïde $\mathcal{E}$ contenant K.

3. (a) Soit $A \in \mathcal{M}$. Alors $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et donc les valeurs propres de A sont des réels positifs. De plus, $\det(A) \geqslant \det(A_0) > 0$ et donc les valeurs propres de A sont des réels strictement positifs. Par suite, $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On a montré que $\mathcal{M} \subset \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

(b) Soit $A \in \mathcal{M}$. Pour $X \in K$, on a $0 \leqslant {}^tXAX \leqslant 1$ et donc $X \in \mathcal{E}_A$. Par suite, A est un élément de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $K \subset \mathcal{E}_A$. La question III.4.1.(d) permet d'affirmer que $|||A||| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}$. Ainsi, $\forall A \in \mathcal{M}$, $|||A||| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}$ et donc $\mathcal{M}$ est une partie bornée de $\mathcal{M}$.

(c) • Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de matrices symétriques positives. On pose $A = \lim\limits_{p\to+\infty} A_p$. Déjà A est symétrique car $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en tant que sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie. Ensuite, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXA_pX \geqslant 0$ et par passage à la limite quand p tend vers $+\infty$, on obtient $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geqslant 0$. Donc $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
Finalement, toute suite convergente d'éléments de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ converge dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et donc $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Soit $F_1 = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})/ \det(A) \geqslant \det(A_0)\}$. Alors $F_1 = \det^{-1}([\det(A_0), +\infty[)$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un fermé de $\mathbb{R}$ par une application continue.

• Soit $F_2 = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})/ \forall X \in K,\ 0 \leqslant {}^tXAX \leqslant 1\}$. Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de F_2. Alors $\forall X \in K$, $0 \leqslant {}^tXA_pX \leqslant 1$. On pose $A = \lim\limits_{p\to+\infty} A_p$. Par passage à la limite quand p tend vers $+\infty$, on obtient $0 \leqslant {}^tXAX \leqslant 1$. F_2 est donc un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Mais alors $\mathcal{M} = \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \cap F_1 \cap F_2$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(d) D'après la question III.4.1.(a), $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})/ \nu(A) \leqslant \nu(A_0) \text{ et } \forall X \in K,\ 0 \leqslant {}^tXAX \leqslant 1\}$. Soient $(A_1, A_2) \in \mathcal{M}$ et $t \in [0,1]$.

• D'après la question III.3.4.(c).i, $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe et donc $tA_1 + (1-t)A_2 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

• D'après la question III.3.4.(c).iii, la fonction ν est strictement convexe sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et donc $\nu(tA_1 + (1-t)A_2) \leqslant t\nu(A_1) + (1-t)\nu(A_2) \leqslant t\nu(A_0) + (1-t)\nu(A_0) = \nu(A_0)$.

• Pour $X \in K$, ${}^tX(tA_1 + (1-t)A_2)X = t{}^tXA_AX + (1-t){}^tXA_2X$ et donc $0 \leqslant {}^tX(tA_1 + (1-t)A_2)X \leqslant t + 1 - t = 1$.

Ainsi, $\forall (A_1, A_2) \in \mathcal{M}^2$, $\forall t \in [0,1]$, $tA_1 + (1-t)A_2 \in \mathcal{M}$ et donc $\mathcal{M}$ est convexe.

4. $\mathcal{M}$ est un fermé borné de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donc un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie. D'autre part, $\mathcal{M}$ est convexe et la fonction ν est strictement convexe sur $\mathcal{M}$. D'après la question III.2.(a), la fonction ν admet un minimum, atteint en un unique point de $\mathcal{M}$. Soit A l'élément de $\mathcal{M}$ en lequel ce minimum est atteint.
Soit $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. $K \subset \mathcal{E}_B \Leftrightarrow \forall X \in K,\ X \in \mathcal{E}_B \Leftrightarrow \forall X \in K,\ 0 \leqslant {}^tXBX \leqslant 1$. En particulier, $\mathcal{E}_A$ est un ellipsoïde contenant K.
1er cas. Si $0 < \det(B) < \det(A_0)$, alors $V(\mathcal{E}_B) = \dfrac{k_n}{\sqrt{\det(B)}} > \dfrac{k_n}{\sqrt{\det(A_0)}} \geqslant \dfrac{k_n}{\sqrt{\det(A)}} = V(\mathcal{E}_A)$.

2ème cas. Si $\det(A_0) \leqslant \det(B)$, alors $V(\mathcal{E}_B) = k_n\nu(B) \geqslant k_n\nu(A) = V(\mathcal{E}_A)$ avec égalité si et seulement si $B = A$.

En résumé, il existe un ellipsoïde de volume minimum contenant K et cet ellipsoïde est unique.

5. (a) $\overset{\circ}{K} = \varnothing$.

(b) On munit $\mathbb{R}^2$ de son repère canonique. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'ellipse $\mathcal{E}_n$ d'équation $\dfrac{x^2}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\dfrac{1}{n}\right)^2} = 1$ contient K. Son aire est $\dfrac{\pi}{n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$. Or $\operatorname{Inf}\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{\pi}{n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 0$. Par suite, s'il existe une ellipse d'aire minimale contenant K, son aire est nulle ce qui est impossible. Donc il n'existe pas d'ellipse d'aire minimale contenant K.

