Interrogation du Mercredi 6 Décembre 2011

Exercice 1 ***Examen du 27 juin 2011***
On considère un sous-ensemble E majoré et non vide de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Voici une liste d'énoncés, dans lesquels les lettres minuscules sont des variables astreintes à $\mathbb{R}$. Pour chaque couple (i, j) d'indices compris entre 1 et 10 tels que $i < j$, indiquer si les énoncés A_i et A_j sont ou ne sont pas logiquement équivalents. On pourra consigner les réponses dans un tableau. Aucune justification n'est demandée.

A_1	m est la borne supérieure de E
A_2	m est un minorant de E
A_3	m est le plus grand élément de E
A_4	x est inférieur ou égal à la borne supérieure de E
A_5	$m \in E$ et $(\forall x \in E)(x \leq m)$
A_6	$\exists m (\forall x \in E)(m \leq x)$
A_7	$\exists z (x \leq z \wedge (z \in E \text{ et } (\forall y \in E)(y \leq z)))$
A_8	$((\forall x \in E)(x \leq m) \text{ et } (\forall y < m)(\exists z \in E)(z > y))$
A_9	$(\forall x \in E)(m \leq x)$
A_{10}	$x \in E$

Exercice 2 Soient A et B deux parties de E. Le but de l'exercice est de discuter et de résoudre l'équation $A \cup X = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

1. Montrer que l'équation $A \cup X = B$ a au moins une solution si et seulement si $A \subseteq B$.
2. Supposons $A \subseteq B$, et posons $X_0 = B \cap A^c$. Montrer que X est solution de l'équation si et seulement si X vérifie $X_0 \subseteq X \subseteq B$.