Feuille de TD n° 5

Raisonnements mathématiques

Exercice 1. ***Examen du 11 janvier 2011***
Soit a et b deux réels tels que $a > 0$ et $a + b \geq 0$. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(a+b)^n \geq a^n + na^{n-1}b.$$

Exercice 2. ***Examen du 12 janvier 2010***
On considère les deux énoncés suivants, dans lesquels les variables sont astreintes à l'ensemble des entiers naturels :

$$P[n] : 4^n - 1 \text{ est divisible par } 3,$$

$$Q[n] : 4^n + 1 \text{ est divisible par } 3.$$

1. Démontrer que les deux énoncés suivants sont vrais :

$$\forall k(P[k] \Rightarrow P[k+1]),$$

$$\forall k(Q[k] \Rightarrow Q[k+1]).$$

2. L'énoncé $\forall n P[n]$ est-il vrai ?
3. L'énoncé $\forall n Q[n]$ est-il vrai ?

Exercice 3.

1. Démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{6}$.
2. En déduire que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.
3. Montrer que $ln(3)/ln(2) \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 4. ***Partiel du 19 novembre 2011***
Les variables sont astreintes à $\mathbb{N}$. Énoncer la contraposée de la proposition suivante, puis la démontrer :

$$\forall a \forall b (a^2 \leq b^2 \Rightarrow a \leq b)$$

Exercice 5. Montrer que chacun des ensembles suivants est un intervalle que vous calculerez.

$$I = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n} \right[\text{ et } J = \bigcup_{n=2}^{+\infty} \left[1 + \frac{1}{n}, n \right].$$

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et soient F et G deux sous-espaces de E. Montrer que

$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \Leftrightarrow F \subseteq G \text{ ou } G \subseteq F.$$

Exercice 7. Démontrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, l'équation

$$P(x) = exp(x)$$

ne peut avoir qu'un nombre fini de solutions dans $\mathbb{R}$.

Exercice 8. ***Caractérisation séquentielle de la limite***
Soit f une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$, et soit $a \in I$.

1. Montrer que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de I qui converge vers a, $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(a)$.
2. En déduire que $x \mapsto sin(\sqrt{x})$ n'a pas de limite quand x tend vers $+\infty$. De même, montrer que $x \mapsto cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ n'a pas de limite quand x tend vers 0.

Exercice 9.

1. Montrer que si p, $p + 2$ et $p + 4$ sont premiers, alors $p = 3$.
2. En déduire que 5 est le seul nombre premier qui est somme et différence de nombres premiers.

Exercice 10. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une application croissante. On considère l'ensemble

$$E = \{x \in [0, 1] | f(x) \geq x\}.$$

Montrer que E possède une borne supérieure b, puis que $f(b) = b$.