Feuille de TD n° 4

Ensembles, relations, fonctions

Exercice 1. Compléter avec les symboles $\in$ ou $\subseteq$.

$$0\ldots[0;1]\ ;\ \{a\}\ldots\{a,b,c\}\ ;\ \{3\}\ldots\mathbb{N}\ ;\ [-1;1]\ldots\mathbb{R}\ ;\ \{0,1\}\ldots\mathcal{P}(\mathbb{N})\ ;\ \{0\}\ldots\mathcal{P}(\{0,1\})$$

$$[0;1]\ldots\mathcal{P}([0;1])\ ;\ \{[0;1]\cup[3;4]\}\ldots\mathcal{P}(\mathbb{R})\ ;\ \mathbb{N}\ldots\mathbb{Z}\ ;\ \mathbb{N}\ldots\mathcal{P}(\mathbb{R})\ ;\ \emptyset\ldots\{\emptyset\}.$$

Exercice 2. Dans cet exercice A, B, C désignent des parties d'un ensemble E. Donner des énoncés écrits uniquement avec les connecteurs, les quantificateurs et le symbole $\in$ équivalents à :

$$A\subseteq B\ ;\ A\subsetneq B\ ;\ A\nsubseteq B\ ;\ A\subseteq B^c\ ;\ A\cup B\subseteq C\ ;\ A\cap B^c\nsubseteq C\ ;\ A\subseteq B\cap C\ ;\ A\subsetneq B\cup C^c.$$

Exercice 3. Soit E un ensemble, A et B des parties de E et $(B_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E indexée par un ensemble I quelconque. Le complémentaire dans E d'une partie X de E est noté X^c. Démontrer les égalités

$$(A\cup B)^c = A^c\cap B^c \text{ et } A\cap\bigcup_{i\in I}B_i = \bigcup_{i\in I}(A\cap B_i).$$

Exercice 4. ***Examen du 12 janvier 2010.***
Soit E un ensemble. Pour toute partie X de E, on note X^c le complémentaire de X dans E.

1. Soit X et Y des parties de E telles que $X\cup Y = X\cap Y$. Démontrer que $X = Y$.
2. Démontrer que, quelles que soient les parties A et B de E, on a
$$(A\cap B)^c = A^c\cup B^c.$$
3. Est-il possible que des parties A et B de E soient telles que $(A\cap B)^c = A^c\cap B^c$?
4. On suppose dans cette question que l'ensemble E est tel que, quelles que soient les parties A et B de E,
$$(A\cap B)^c = A^c\cap B^c.$$
Démontrer que E est alors l'ensemble vide.

Exercice 5. Dans cet exercice, f est une application d'un ensemble E dans un ensemble F.

1. Soit $A\subseteq E$, donner une expression en compréhension de $f(A)$.
2. Soit $B\subseteq F$, donner une expression en compréhension de $f^{-1}(B)$.
3. Montrer qu'on a $\forall A\subseteq E, A\subseteq f^{-1}(f(A))$.
4. Montrer que si f est injective, on a $\forall A\subseteq E, A = f^{-1}(f(A))$.

5. Montrer qu'on a $\forall B \subseteq F, f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.
6. Montrer que si f est surjective, on a $\forall B \subseteq F, B = f(f^{-1}(B))$.

Exercice 6. Soit E et F deux ensembles et f une application de E dans F.

1. Montrer que, si A, B et C sont des parties de F, alors
$$f^{-1}(B \cup C) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(C),$$
$$f^{-1}(B \cap C) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(C),$$
$$f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c.$$
2. Soient M et N des parties de E.
   (a) Montrer que
   $$f(M \cap N) \subseteq f(M) \cap f(N).$$
   (b) Donner un exemple où $f(M \cap N) \neq f(M) \cap f(N)$.
   (c) Que peut-on dire de $f(M \cup N)$ et de $f(M^c)$?
   (d) On suppose que f est une injection. Montrer que $f(M \cap N) = f(M) \cap f(N)$ mais que $f(M^c)$ n'est pas nécessairement égal à $f(M)^c$. Donner des exemples où f n'est pas injectif et où $f(M^c)$ est égal à l'ensemble F tout entier.
   (e) Montrer que, si pour tout couple (M, N) de parties de E, on a $f(M \cap N) = f(M) \cap f(N)$, alors f est injective.

Exercice 7. Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ?

(i)	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,	$f(x) = x^2$	(ii)	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$,	$f(x) = x^2$
(iii)	$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,	$f(x) = x^2$	(iv)	$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$,	$f(x) = x^2$
(v)	$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,	$f(z) = z \cdot \overline{z}$	(vi)	$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,	$f(z) = \|z\| \cdot z$
(vii)	$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,	$f(n) = n^2$	$(viii)$	$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$,	$f(n) = n^2$
(ix)	$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,	$f(n) = n + 1$	(x)	$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$,	$f(n) = n + 1$

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x - y, -2x + 2y)$.

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $(a, b) \in f(\mathbb{R}^2)$ si, et seulement si, $2a + b = 0$.
2. Que dire de l'injectivité et de la surjectivité de l'application f ?

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ l'application définie par :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x - y^2.$$

1. L'application f est-elle injective ?
2. Montrer que f est surjective.

Exercice 10. Montrer que l'application $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(m, n) \mapsto 2^m (2n + 1)$ est bijective.

Exercice 11. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites de nombres réels. On définit deux applications R et L de E dans E de la façon suivante : pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à E, $R(u)$ est la suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $L(u)$ est la suite $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$, $w_n = u_{n-1}$.

1. Les applications R et L sont elles injectives ? surjectives ?
2. Montrer que $R \circ L = Id_E$, mais que $L \circ R \neq Id_E$.

Exercice 12. ***Examen du 12 janvier 2010***
On désigne par E l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x associe sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x. Étant donné une partie A de $\mathbb{R}$, on note $E(A)$ son image directe par E et $E^{-1}(A)$ son image réciproque par E.

1. L'application E est-elle surjective ?
2. L'application E est-elle injective ?
3. Déterminer les parties suivantes de $\mathbb{R}$:

$$E(\mathbb{R})\ ;\ E(\{\sqrt{2}\})\ ;\ E([0;1[)\ ;\ E\left(\left]0;\frac{1}{\pi}\right[\right)\ ;\ E\left(\left]\frac{1}{2};2\right]\right)\ ;\ E(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})\ ;$$

$$E^{-1}(\mathbb{R})\ ;\ E^{-1}(\{\sqrt{2}\})\ ;\ E^{-1}([0;1[)\ ;\ E^{-1}(\mathbb{Q}).$$

4. Est-il vrai que, quelles que soient les parties A et B de $\mathbb{R}$, on a

$$E(A \cap B) = E(A) \cap E(B)\ ?$$

Si oui, donner une démonstration. Si non, donner un contre-exemple.

Exercice 13. Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$. On note F l'ensemble des applications de E dans $\{0,1\}$.

1. Montrer que F est fini et calculer son cardinal.
2. Pour toute partie A de E, on pose :

$$\chi_A : \left(\begin{array}{c} E \to \{0,1\} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array}\right).$$

χ_A est appelée *fonction caractéristique* de A et est clairement élément de F. On considère alors l'application $\phi : \mathcal{P}(E) \to F, A \mapsto \chi_A$. Montrer que ϕ est bijective. En déduire le cardinal de $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 14. Soit E un ensemble non vide. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Montrer qu'il existe une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$.
2. Soit $f : E \to \mathcal{P}(E)$ une application. On considère le sous-ensemble suivant de E :

$$A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}.$$

Montrer qu'il n'existe pas d'élément a de E tel que $A = f(a)$. En déduire qu'il n'existe pas d'application surjective de E dans $\mathcal{P}(E)$.