Feuille de TD n° 3

Quantificateurs

Exercice 1. Le théorème des valeurs intermédiaires.

1. Énoncer le théorème des valeurs intermédaires.
2. La réciproque de ce théorème est-elle vraie ?
3. Énoncer ce théorème sans les quantifications relativisées.

Exercice 2.

1. Donner un énoncé traduisant “La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante”.
2. Donner un énoncé traduisant “La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée”.
3. Vérifier que l'on a $[(A \wedge B) \Rightarrow C] \Leftrightarrow [A \Rightarrow (B \Rightarrow C)]$.
   Donner alors deux autres formulations du théorème “toute suite croissante majorée converge”.

Exercice 3. Dans chacun des cas suivants, on demande un énoncé synonyme de l'énoncé proposé et écrit exclusivement avec les symboles (ou les divers mots ou groupe de mots que ces symboles représentent) suivants : les parenthèses, les connecteurs et les quantificateurs, des variables, le symbole d'égalité, ainsi que des symboles supplémentaires précisés pour chaque énoncés. En cas d'utilisation de nouvelles variables, on précisera le domaine auquel elles sont astreintes.

1. La variable A est astreinte à l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$.
   Symboles autorisés : $\in$, $<$.
   Enoncé proposé : La partie A n'a pas de plus petit élément.
2. La variable A est astreinte à l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$.
   Symboles autorisés : $\in$, $\leq$.
   Enoncé proposé : La partie A n'a pas de plus petit élément.
3. La variable m est astreinte à $\mathbb{R}$ et la variable A est astreinte à l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$.
   Symboles autorisés : $\in$, $\leq$.
   Enoncé proposé : Le réel m est la borne inférieure de la partie A.
4. La variable m est astreinte à $\mathbb{R}$ et la variable A est astreinte à l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$.
   Symboles autorisés : $\in$, $\leq$, $>$.
   Enoncé proposé : Le réel m est la borne inférieure de la partie A.
5. Les variables A et B sont astreintes à l'ensemble des parties d'un ensemble E fixé.
   Symboles autorisés : $\in$.
   Enoncé proposé : Les parties A et B sont disjointes.

6. Symboles autorisés : 0, $\leq$, $\times$.
   Énoncé proposé : Tout nombre réel positif ou nul admet une racine carrée.
7. La variable f est astreinte à l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   Symboles autorisés : $<$, $>$, $\leq$, $\geq$.
   Enoncé proposé : f est croissante.
8. La variable f est astreinte à l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   Symboles autorisés : $<$, $>$, $\leq$, $\geq$.
   Enoncé proposé : f n'est pas croissante.
9. Les variables a, b, c et x sont astreintes à $\mathbb{R}$.
   Symboles autorisés : $-$, $+$, $\times$, ^{2}, 0.
   Énoncé proposé : L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$.
10. Les variables $a_0, a_1, \ldots, a_k, x$ sont astreintes à $\mathbb{C}$, k est un entier naturel non nul fixé.
    Symboles autorisés : $+$, $\times$, $^2, ^3, \ldots, ^n$, 0.
    Énoncé proposé : Le polynôme $a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

Exercice 4. Dans chacun des cas suivants, donner un énoncé synonyme de l'énoncé proposé, qui ne comporte aucune variable muette.
Dans les cinq premiers énoncés, toutes les variables sont astreintes à $\mathbb{R}$.

(a) $(\forall \varepsilon > 0)(|x| < \varepsilon)$,
(b) $(\exists \varepsilon > 0)(|x| < \varepsilon)$,
(c) $(\exists c > 0)(a + c = b)$,
(d) $\exists x \exists y (x^2 + y^2 = z)$,
(e) $\forall y (|x| + |y| = |x + y|)$.

Dans l'énoncé suivant, toutes les variables sont astreintes à $\mathbb{N}$.

(f) $n > 1$ et $\forall u \forall v [\exists k (uv = kn) \ \Rightarrow \ (\exists x (u = xn)$ ou $\exists y (v = yn))]$.

Dans l'énoncé suivant, A désigne un ensemble fixé.

(g) $(\exists x \in A)(\forall y \in A)(\forall z \in A)(y = x$ ou z = x).

Dans l'énoncé suivant, les variables P et Q sont astreintes à l'ensemble des fonctions polynomiales définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, les variables x et a sont astreintes à $\mathbb{R}$.

(h) $\exists Q, \forall x (P(x) = (x - a)Q(x))$.

Dans l'énoncé suivant, les variables x, a, b et t sont astreintes à $\mathbb{R}$ et f désigne une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

(i) $(\forall x, f(x) \geq 0)$ et $\forall a \forall b (\int_a^b f(t)dt = 0)$.

Exercice 5. Les variables a, b, c, x, et y sont astreintes à l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. On considère les trois énoncés suivants :

$$U : \exists x(ax^2 + bx + c = 0),$$

$$V : \forall x \forall y[(ax^2 + bx + c = 0 \text{ et } ay^2 + by + c = 0) \Rightarrow x = y],$$

$$W : \exists x \forall y[(ax^2 + bx + c = 0) \text{ et } (ay^2 + by + c = 0 \Rightarrow x = y)].$$

Pour chacun des huit énoncés suivants, donner un énoncé synonyme ne comportant aucune mutification (ni explicite ni implicite) :

U ; V ; W ; U et V ; U et (non V) ; (non U) et V ; U et (non W) ; (non U) et W.

Exercice 6. Pour chaque sous-ensemble A de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, on désigne par $\mathcal{F}(A)$ et $\mathcal{G}(A)$ les énoncés suivants :

$$\mathcal{F}(A) : (\forall x \in A)(\forall y)(y < x \Rightarrow y \in A)$$

$$\mathcal{G}(A) : (\forall x \in A)(\exists y \in A)(y < x)$$

dans lequel x et y sont des variables astreintes à $\mathbb{R}$ et $<$ désigne la relation d'ordre stricte usuelle sur $\mathbb{R}$.

1. Indiquer les variables libres (parlantes) et les variables liées (muettes) de $\mathcal{F}(A)$.
2. Dans chacun des cas suivants, indiquer si l'énoncé $\mathcal{G}(A)$ est vrai ou non :
   - $A = \mathbb{R}$,
   - $A = \mathbb{Q}$,
   - $A = [0; 1]$,
   - $A =]0; 1]$,
   - $A = \{x \in \mathbb{R} | (\exists n \in \mathbb{N})(x = \frac{1}{n})\}$.
3. Démontrer que la proposition suivante est vraie :
$$\forall A(\mathcal{F}(A) \Rightarrow \mathcal{G}(A)).$$
4. Démontrer, à l'aide d'un contre-exemple, que la proposition réciproque est fausse.
5. Pour chacun des énoncés suivants, indiquer, sans justification, s'il est synonyme de $\mathcal{F}(A)$, s'il est synonyme de $\mathcal{G}(A)$ ou s'il n'est synonyme d'aucun de ces deux énoncés :
   - A n'a pas de plus petit élément,
   - A est infini,
   - A n'est pas minoré,
   - A n'a pas de borne inférieure,
   - A n'est pas minoré ou A n'a pas de borne inférieure,
   - A est soit vide, soit un intervalle de $\mathbb{R}$ dont l'extrémité gauche est $-\infty$.

Exercice 7. Dans cet exercice, on considère des énoncés $A[x, y]$ à deux variables qui sont astreintes à l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et, pour chacun d'eux, six énoncés clos obtenus en quantifiant ces variables de diverses façons. On demande d'indiquer pour chacun de ces énoncés clos s'il est vrai ou non, sans donner de justification. On reproduira pour cela le tableau ci-après et on inscrira dans chaque case vide V ou F selon que l'énoncé correspondant est vrai ou faux.

$A[x, y]$:	$\sin(x + y) = \sin(x) + \sin(y)$	$y = x^2 - x$	$xy = x^2 - x$
$\forall x \forall y A[x, y]$			
$\exists x \forall y A[x, y]$			
$\forall x \exists y A[x, y]$			
$\exists x \exists y A[x, y]$			
$\forall y \exists x A[x, y]$			
$\exists y \forall x A[x, y]$			

Exercice 8. On rappelle que $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne inférieure, c'est-à-dire que toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ a une borne inférieure. En déduire que toute suite de réels décroissante et minorée est convergente.

Exercice 9. Montrer que pour toutes suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels,

1. si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors elle est bornée.
2. si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l' \in \mathbb{R}$, alors
$$\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = l + l' \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_n \cdot v_n = l \cdot l'.$$
3. si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \cdot v_n = 0$.
4. si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ avec $l > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.