Université Paris Diderot | **Premier semestre 2011-2012**
Licence 1ère année | **LM1 - Langage Mathématique**

Examen du 10 janvier 2012

Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices, ordinateurs et autres appareils électroniques sont interdits.

Les huit exercices sont indépendants. On peut obtenir une bonne note sans les avoir tous traités.

Le sujet comporte six pages. S'y ajoutent deux feuilles annexes (1 et 2), destinées aux réponses à certaines questions des exercices I, III *et* V. *Elles doivent impérativement être jointes à la copie. Ne pas oublier d'y indiquer ses nom et prénom.*

À l'exception des questions où la mention « on ne demande pas de justification » figure explicitement, toute réponse doit être justifiée.

Exercice I

Dans tout l'exercice, la variable P est astreinte à l'ensemble des fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et les variables a, b, c, x, y z, u et v sont astreintes à $\mathbb{R}$.

1) **[Pour répondre à cette question, utiliser la feuille annexe 1. On ne demande pas de justification.]**
Dans chacun des trois cas suivants, écrire une proposition synonyme de la proposition donnée et ne contenant aucune variable muette :
   a) $\exists a\, \exists b\, \forall x \;\; P(x) = ax + b$;
   b) $\exists a\, \exists b\, \big(a \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall x \;\; (P(x) = ax + b)\big)$;
   c) $\forall x\, \forall y\, \forall z\, \Big((P(x))^2 + (P(y))^2 + (P(z))^2 = 0 \implies (x = y \text{ ou } x = z \text{ ou } y = z)\Big)$.

2) **[Pour répondre à cette question, utiliser la feuille annexe 1. On ne demande pas de justification.]**
Dans chacun des trois cas suivants, écrire une proposition synonyme de la proposition donnée en utilisant exclusivement les symboles suivants : des variables astreintes à l'ensemble $\mathbb{R}$, la variable P, les parenthèses, les connecteurs, les quantificateurs, le signe d'addition, le signe de multiplication, la notation puissance avec des exposants entiers, le symbole 0, le symbole $\neq$ et le symbole $=$.
   a) P est de degré 2 ;
   b) P a une unique racine ;
   c) P a au moins trois racines distinctes.

3) Démontrer que la proposition suivante est vraie :

$$\forall P\, \Big(\exists b\, \exists c\, \big(c < 0 \quad \text{et} \quad \forall x \;\; (P(x) = x^2 + bx + c)\big) \\ \implies \exists u\, \exists v\, (P(u) = 0 \text{ et } P(v) = 0 \text{ et } u \neq v)\Big)$$

4) Démontrer le théorème suivant :

Pour tout polynôme du second degré à coefficients réels, si le coefficient dominant (coefficient du terme de degré 2) et le terme constant sont de signes contraires, alors ce polynôme a exactement deux racines.

5) La réciproque du théorème précédent est-elle vraie ?

Exercice II

Les intervalles considérés sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

1) Démontrer que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right] = \{1\}$$

2) Démontrer que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\ln\left(\frac{1}{n+1}\right), n^2 - n\right] = \mathbb{R}$$

Exercice III

On considère un ensemble E et des sous-ensembles A et B de E.

Pour tout sous-ensemble X de E, on désigne par X^c le complémentaire de X dans E.
Le symbole $\subset$ représente l'inclusion ensembliste *au sens large* (parfois aussi notée $\subseteq$).
On rappelle que les opérations de réunion et d'intersection dans l'ensemble des parties de E sont distributives l'une par rapport à l'autre, c'est-à-dire que, pour toutes parties X, Y et Z de E, on a

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

et

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z).$$

1) **[Pour répondre à cette question, utiliser la feuille annexe 1.]**

Dans chacun des cas suivants, on demande d'écrire une proposition synonyme de la proposition donnée en utilisant exclusivement les symboles suivants : des variables astreintes à l'ensemble E (lettres minuscules), des variables astreintes à l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E (lettres majuscules), les parenthèses, les connecteurs, les quantificateurs, le symbole d'appartenance $\in$ et le symbole d'égalité $=$ (les abréviations $\notin$ et $\neq$ sont aussi admises).

a) A est strictement inclus dans B

b) $(A \cap B) \subset C$

c) $A = B^c$

d) A et B sont disjoints

2) Démontrer que les propositions

$$A \cup B = E$$

et

$$A^c \subset B$$

sont équivalentes.

3) **[Pour répondre à cette question, utiliser la feuille annexe 1.
On ne demande pas de justification.]**
Dans les propositions (1), (2) et (3) ci-dessous, toutes les variables sont astreintes à l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E.

Une et une seule de ces trois propositions est synonyme de la proposition suivante :

> *Toute partie de E s'écrit d'une façon et d'une seule comme réunion d'une partie de A et d'une partie de B.*

Déterminer laquelle.

Attention : une réponse incorrecte enlève des points ; l'absence de réponse n'en enlève pas.

(1) $\forall X \ \ \exists Y \subset A \ \ \exists Z \subset B \ \ (X = Y \cup Z \quad \text{et} \quad Y \neq Z)$

(2) $\forall X \ \ \exists Y \subset A \ \ \exists Z \subset B$
$\big(X = Y \cup Z \quad \text{et} \quad \forall Y' \subset A \ \ \forall Z' \subset B \ \ (X = Y' \cup Z' \implies (Y' = Y \text{ et } Z' = Z))\big)$

(3) $\forall X \ \ \exists Y \subset A \ \ \exists Z \subset B \ \big(X = Y \cup Z \quad \text{et} \quad \forall Y' \subset A \ \ \forall Z' \subset B \quad X \neq Y' \cup Z'\big)$

4) On suppose (dans cette question seulement) que $A \cup B = E$.
Démontrer que, pour toute partie X de E, on a

$$X = (X \cap A) \cup (X \cap B).$$

5) On suppose (dans cette question seulement) que $A \cap B = \emptyset$. Démontrer que, pour toute partie X de E, la propriété suivante est vérifiée :

> Quels que soient les sous-ensembles Y et Y' de A et quel que soit le sous-ensemble Z de B, si $X = Y \cup Z$ et $X = Y' \cup Z$, alors $Y = Y'$.

6) Démontrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

[1] $(A \cup B = E \qquad \text{et} \qquad A \cap B = \emptyset)$

[2] Toute partie de E s'écrit d'une façon et d'une seule comme réunion d'une partie de A et d'une partie de B

Exercice IV

Notations

Étant donné des ensembles E et F et une application u de E dans F, pour toute partie Y de F, on désigne par $u^{-1}[Y]$ l'image réciproque par u du sous-ensemble Y :

$$u^{-1}[Y] = \{x \in E \mid u(x) \in Y\}$$

Pour tout réel $x \geqslant 0$, $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

On considère les trois applications f, g et h de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies de la façon suivante :

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = n + 1$.
- $g(0) = g(1) = 0$ et $\forall n \geqslant 2 \quad g(n) =$ le plus grand diviseur de n différent de n.
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad h(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

1) Déterminer les ensembles $f^{-1}[\{1\}]$, $g^{-1}[\{1\}]$ et $h^{-1}[\{1\}]$.
2) Pour chacune des trois fonctions f, g et h, indiquer si elle est injective ou non et si elle est surjective ou non.

Exercice V

On considère une application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une suite u de nombres réels. Comme d'habitude, on note u_n au lieu de $u(n)$ l'image de l'entier n par u et la suite est également notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On s'intéresse aux trois propositions suivantes concernant la suite u :

A : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in \mathbb{Z}$

B : $(\exists l \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - l| \leqslant \varepsilon)$

C : $(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geqslant k \Longrightarrow u_n = u_k)$

1) **[Pour répondre à cette question, utiliser la feuille annexe 2. On ne demande pas de justification.]**
   La proposition A est synonyme de « La suite u ne prend que des valeurs entières ». De la même manière, écrire une proposition synonyme de B et une proposition synonyme de C qui ne comportent aucune variable muette.
2) **[Pour répondre à cette question, utiliser la feuille annexe 2. On ne demande pas de justification.]**
   Écrire une proposition **D** synonyme de « La suite u est bornée » en utilisant les symboles suivants : la variable u, des variables astreintes à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{N}$, les connecteurs, les quantificateurs, les parenthèses, le symbole $\leqslant$, le symbole $\in$, le symbole $\mathbb{N}$ et le symbole $\mathbb{R}$.

3) **[Pour répondre à cette question, utiliser la feuille annexe 2. On ne demande pas de justification.]**
Dans chacun des six cas suivants, indiquer si la suite u proposée vérifie ou non chacune des propositions **A**, **B**, **C**, **D**. On complétera pour cela le tableau donné dans l'annexe 2.
Attention : une réponse incorrecte enlève des points ; l'absence de réponse n'en enlève pas.

a) La suite u est définie par

$$(\forall n \in \mathbb{N})(u_n = \frac{1}{n+1})$$

b) La suite u est définie par

$$(\forall n \leqslant 10)(u_n = n) \text{ et } (\forall n > 10)(u_n = 10)$$

c) La suite u est définie par

$$(\forall n \in \mathbb{N})(u_n = \sqrt{n})$$

d) La suite u est définie par

$$(\forall n \in \mathbb{N})(u_n = \cos n)$$

e) La suite u est définie par

$$u_0 = 1024 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} = \sqrt{\lfloor u_n \rfloor})$$

[*On rappelle que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x.*]

f) La suite u est définie par

$$(\forall n \in \mathbb{N})(u_n = 2n)$$

4) Existe-t-il une suite u telle que les propositions A et D soient vraies et que les propositions B et C soient fausses ?
5) Existe-t-il une suite u telle que les propositions A, C et D soient vraies et que la proposition B soit fausse ?
6) Existe-t-il une suite u telle que la proposition B soit vraie et que les propositions A, C et D soient fausses ?

Exercice VI

On rappelle la formule de trigonométrie $\sin(x+y) = \sin x \, \cos y + \cos x \, \sin y$.

Soit α un nombre réel. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a

$$|\sin(n\alpha)| \leqslant n|\sin\alpha|.$$

Exercice vii

Soit a, b et c des réels strictement positifs vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & abc > 1 \\ \text{(ii)} & a+b+c < \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \end{array}$$

En raisonnant par l'absurde, démontrer chacune des trois propriétés suivantes :

(1) Aucun des réels a, b, c ne peut être égal à 1.
(2) L'un au moins des réels a, b, c est strictement supérieur à 1.
(3) L'un au moins des réels a, b, c est strictement inférieur à 1.

Exercice viii

Tous les nombres considérés dans cet exercice sont des réels strictement positifs et toutes les équations proposées sont à résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$.
Le but de l'exercice est de démontrer le théorème suivant :

> Théorème : *Il existe des nombres irrationnels strictement positifs a et b tels que le nombre a^b soit rationnel.*

1) Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation d'inconnue t :

$$\left(\sqrt{2}\right)^t = 2.$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation d'inconnue u :

$$\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^u = 2.$$

3) Démontrer qu'il existe un nombre irrationnel x tel que

$$\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^x$$

soit un nombre rationnel.

4) Démontrer le théorème annoncé. [*On distinguera deux cas.*]