Université Paris Diderot
Département Sciences Exactes

Langage Mathématique (LM1)
2011-2012

Examen partiel du 19 novembre 2011

Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé. On peut obtenir une excellente note sans avoir répondu à toutes les questions. La plus grande importance sera accordée à la qualité de la présentation et de la rédaction de la copie. Les huit exercices sont indépendants.
On traitera les exercices 7 et 8 directement sur les feuilles numéros 3 et 4 du sujet en remplissant les cases prévues pour les réponses. On détachera ces deux feuilles et on les joindra à la copie (bien marquer son nom). Aucune justification n'est demandée pour ces deux exercices.

Exercice 1

La seule justification demandée dans cet exercice concerne les variables muettes (question 2).

Dans les expressions (E_1) à (E_5) proposées ci-dessous, les domaines auxquels sont astreintes les variables ne sont pas indiqués.

1. Pour chaque expression, indiquer un domaine possible pour chacune des variables.
2. Pour chaque expression, dire s'il s'agit d'un nom ou d'un énoncé et indiquer ses variables libres (parlantes) et ses variables liées (muettes).

$$(E_1) \qquad \int_0^{k\pi} \sin t \, dt$$

$$(E_2) \qquad \sum_{k=0}^{n} ak = a \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(E_3) \qquad \left\{ x \in \mathbb{R}_+^* \;\middle|\; f \text{ est bornée sur l'intervalle } [0,x] \right\}$$

$$(E_4) \qquad \lim_{x \to a} e^{tx}$$

$$(E_5) \qquad \forall x \in A \quad \exists y \in A \quad x < y$$

Exercice 2

1. Est-ce que la proposition $(A \text{ et } B) \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)$ est une tautologie ?

2. Est-ce que la proposition $(A \text{ ou } B) \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)$ est une tautologie ?

Exercice 3

On considère les propositions suivantes :

P : $A \Longrightarrow (B \Longrightarrow (C \Longrightarrow (D \Longrightarrow E)))$
Q : $(A \Longrightarrow E)$ ou $(B \Longrightarrow E)$ ou $(C \Longrightarrow E)$ ou $(D \Longrightarrow E)$

Est-il possible d'attribuer des valeurs de vérité (vrai ou faux) à A, B, C, D, E de telle sorte que l'une des propositions **P**, **Q** soit vraie et l'autre fausse ?

Exercice 4

Pour chacune des six propositions ci-dessous, indiquer si elle est vraie

1. lorsque ses variables sont astreintes à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels ;
2. lorsque ses variables sont astreintes à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

Chacune des douze réponses doit être accompagnée d'une brève justification.

$$(Q_1) \qquad \forall x\ \forall y\ (x < y \Longrightarrow x^2 < y^2)$$

$$(Q_2) \qquad \exists x\ \forall y\ (x < y \Longrightarrow x^2 < y^2)$$

$$(Q_3) \qquad \exists y\ \forall x\ (x < y \Longrightarrow x^2 < y^2)$$

$$(Q_4) \qquad \exists x\ \exists y\ (x < y \text{ et } y^2 < x^2)$$

$$(Q_5) \qquad \forall x\ \exists y\ (x < y \text{ et } y^2 < x^2)$$

$$(Q_6) \qquad \forall x\ \forall y\ (x \leqslant y \text{ ou } y^2 \leqslant x^2)$$

Exercice 5

1. En utilisant exclusivement les symboles suivants :
des variables astreintes à l'ensemble $\mathbb{N}$, les parenthèses, les connecteurs, les quantificateurs, le signe de multiplication, le nombre 2 et le symboles $=$, écrire une proposition synonyme de la proposition suivante :

« Tout entier naturel qui est pair et qui est un carré est divisible par 4 »

2. Donner une preuve de cette proposition.

Exercice 6

Les variables sont astreintes à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.
Donner une preuve de la proposition suivante :

$$\forall a\ \forall b\ (a^2 \leqslant b^2 \Longrightarrow a \leqslant b).$$

Feuille à détacher et à joindre à la copie

Nom et prénom	

Exercice 7

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en écrivant « *vrai* » ou « *faux* » dans la case vide correspondante.
Aucune justification n'est demandée.

P_1	$\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$	
P_2	$\{\emptyset\} \subseteq \emptyset$	
P_3	$\emptyset \in \{\emptyset\}$	
P_4	$\{\emptyset\} \in \emptyset$	
P_5	$\emptyset = \{\emptyset\}$	
P_6	$\pi \subseteq [\frac{\pi}{3}, \pi]$	
P_7	$\pi \in [\frac{\pi}{3}, \pi]$	
P_8	$\pi \subseteq \{\frac{\pi}{3}, \pi\}$	

P_9	$\pi \in \{\frac{\pi}{3}, \pi\}$	
P_{10}	$\frac{\pi}{2} \in \{\frac{\pi}{3}, \pi\}$	
P_{11}	$\frac{\pi}{2} \in [\frac{\pi}{3}, \pi]$	
P_{12}	$\emptyset \in [\frac{\pi}{3}, \pi]$	
P_{13}	$\emptyset \subseteq [\frac{\pi}{3}, \pi]$	
P_{14}	$\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\} \in [\frac{\pi}{3}, \pi]$	
P_{15}	$[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}] \subseteq \{\frac{\pi}{3}, \pi\}$	
P_{16}	$[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}] \subseteq [\frac{\pi}{3}, \pi]$	

Feuille à détacher et à joindre à la copie

Nom et prénom	

Exercice 8

Dans les propositions ci-dessous, toutes les variables sont astreintes à l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Pour chaque proposition A_i du tableau de gauche, on demande de trouver une proposition B_j du tableau de droite qui soit synonyme de A_i.
On inscrira dans chaque case vide en regard d'une proposition A_i le code B_j de la proposition choisie comme synonyme de A_i.
Il est possible qu'une même proposition du tableau de droite soit synonyme de plusieurs propositions du tableau de gauche et que certaines propositions du tableau de droite ne soient synonymes d'aucune des propositions du tableau de gauche.
Aucune justification n'est demandée.

A_1	$\exists x \quad xy = 1$	
A_2	$\exists x \quad xy = 0$	
A_3	$\forall x \quad xy = 1$	
A_4	$\forall x \quad xy = 0$	
A_5	$\exists x \quad xy \geqslant 0$	
A_6	$\exists x \quad xy > 0$	
A_7	$\forall x \quad xy \geqslant 0$	
A_8	$\forall x \quad xy \geqslant x$	
A_9	$\forall x \quad xy \geqslant y$	
A_{10}	$\exists x \quad y = \cos x$	
A_{11}	$\exists x \quad x = \cos y$	
A_{12}	$\exists x \quad y = \tan x$	
A_{13}	$\exists x \quad x = \tan y$	
A_{14}	$\exists x \quad e^{xy} = e^x e^y$	
A_{15}	$\forall x \quad e^{xy} = e^x e^y$	

B_1	$y = y$
B_2	$y \neq y$
B_3	$y = 0$
B_4	$y \neq 0$
B_5	$y = 1$
B_6	$y \neq 1$
B_7	$x = y$
B_8	$x \neq y$
B_9	$y \geqslant 0$
B_{10}	$y > 0$
B_{11}	$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
B_{12}	$y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
B_{13}	$x \in [-1, 1]$
B_{14}	$y \in [-1, 1]$
B_{15}	$(\forall k \in \mathbb{Z}) \quad \left(y \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$