CNAM

Semestre 6
2013-2014

Feuille de TD N^o 5 : Formes différentielles en dimension 2

Exercice 1 : Calculer le rotationnel et la divergence des champs de vecteurs suivants :

1. $(e^{x+y}\cos(z), x^2yz, \sin(x+2y+3z))$.
2. $\left(\dfrac{xy-z}{1+y^2}, \dfrac{2x+z}{1+2x^2}, x^3-y^2+z^4\right)$.

Exercice 2 : Calculer les intégrales de surface suivantes :

1. $\displaystyle\int\int_\Gamma z dy\wedge dz$, avec Γ le quart de la sphère unité $x^2+y^2+z^2=1$ déterminé par $x\geq 0$, $z\geq 0$.
2. $\displaystyle\int\int_\Gamma dx\wedge dz$, avec Γ la demi-sphère unité $x^2+y^2+z^2=1$ déterminée par $y\geq 0$.
3. $\displaystyle\int\int_\Gamma x^2 dy\wedge dz$, avec Γ la demi-sphère unité $x^2+y^2+z^2=1$ déterminée par $z\geq 0$.

Exercice 3 : Soit F le champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ défini par $F=(x^2-yz, y^2-zx, z^2-xy)$. Dérive-t-il d'un potentiel scalaire ?

Ecrire l'intégrale donnant le flux du champ F sortant de la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=1$. Donner le résultat de cette intégrale sans faire de calcul.

Exercice 4 : Soit F le champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ défini par $F=(yz, -xz, x^2+xy)$.

1. Montrer qu'il dérive d'un potentiel vecteur.
2. Trouver un potentiel vecteur de la forme $(X(x,y,z), Y(x,y,z), 0)$.
3. Calculer le flux du champ de vecteurs F Ãă travers la demi-sphère $x^2+y^2+z^2=1$, $z\geq 0$.

Exercice 5 : Soit F le champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ défini par $F=(x^2yz,0,0)$. Calculer le flux de ce champ de vecteurs Ãă travers le cube de sommets $(-1,-1,-1)$, $(-1,-1,1)$, $(-1,1,-1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$ et $(1,1,1)$.

Exercice 6 : Soit F un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et soit f un champ de scalaires de $\mathbb{R}^3$. Montrer que :

1. $rot(fF) = frot(F) + grad(f)\wedge F$.
2. $div(fF) = fdiv(F) + grad(f).F$.