

Feuille de TD N° 4 : Formes différentielles en dimension 1

Exercice 1 : Calculer le gradient des fonctions suivantes :

1. $x^2y + \ln(1 + y^2)$.
2. $\frac{xy}{(1+x)(1+y)(1+xy)}$.
3. $xye^y + ye^x$.
4. $e^{\frac{1}{x^2+y^2+1}}$.
5. $\text{Arctan}(xy)$.
6. $z \sin(x^2y)$.
7. $\ln(x^2 + z)$.
8. $e^{-x^2-y^2-z^2}$.
9. $(3x + 4y - z)e^{xyz}$.
10. $\cos(x^2 + y^3 + z^4)$.

Exercice 2 : Les formes différentielles suivantes sont-elles fermées ? Exactes ? Si oui, calculer une primitive de ω .

1. $(2x + 2y + e^{x+y})(dx + dy)$.
2. $\frac{xdy - ydx}{(x-y)^2}$.
3. $\frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2}$.
4. $(x^2 + 2xy + 2xz)dx + (x^2 + y^2)dy + (x^2 + z^2)dz$.

Exercice 3 : Pour quelles valeurs de h la 1-forme différentielle suivante est-elle fermée ?

$$\alpha = \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{(x^2 + y^2)^h}.$$

Dans ce cas, donner un ensemble sur lequel elle est exacte.

Exercice 4 : Soient a, b, c des constantes non nulles. Montrer que la 1-forme différentielle suivante est fermée :

$$\alpha = \frac{(ay - bz)dx + (cz - ax)dy + (bx - cy)dz}{(cz - ax)^2}.$$

Donner deux ensembles sur lesquels elle est exacte.

Exercice 5 : Calculer les intégrales curvilignes suivantes :

1. $\int_{\gamma} x^2 dx + y^3 dy$, où γ est le demi-cercle $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$, parcouru dans le sens positif.
2. $\int_{\gamma} xyz dz$, où γ est le cercle paramétré par $x = \cos(t)$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(t)$, $z = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(t)$.
3. $\int_{\gamma} \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2}$, où γ est le carré de sommets $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$.

4. $\int_{\gamma} \frac{-x dx + y dy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$, où γ est le cercle unité du plan, parcouru dans le sens positif.
5. $\int_{\gamma} x^2 dy + y^2 dx$, où γ est le demi-cercle unité du plan déterminé par $y \geq 0$, parcouru dans le sens positif.

Exercice 6 : Soient f un champ de scalaire, F et G deux champs de vecteurs. Démontrer les formules suivantes :

1. $div(fF) = f div(F) + grad(f).F$.
2. $div(F \wedge G) = G.rot(F) - F.rot(G)$.