

Feuille de TD N° 2 : Séries

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général donné par :

1. $\frac{n^2}{n^3 + 1}$.
2. $\frac{1}{\ln(n)^n}$.
3. $\frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}$.
4. $\frac{1}{\ln(1 + n + n^2)}$.
5. $\frac{n^2}{3^n}$.
6. $1 - \cos(1/n)$.
7. $2^{-\sqrt{n}}$.
8. $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$.
9. $e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}$.
10. $\left(\frac{n}{1+n}\right)^{1/n} - 1$.
11. $\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.
12. $\frac{(n!)^2}{2n^2}$.
13. $\frac{1 + 2 + \dots + n}{n^3}$.

Exercice 2 : Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{(3n+1)(3n+4)}$ (utiliser une décomposition en éléments simples).

Exercice 3 :

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ existe. Ce réel est noté e .
2. Montrer que pour tout $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

3. En déduire que e n'est pas un rationnel.

Exercice 4 : Soient a, b, c trois réels non nuls. La série de terme général $\frac{1}{an+b} - \frac{1}{cn}$ est-elle convergente?

Exercice 5 : Soient $a, b > 0$. Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{2^n + a^n}{2^n + b^n}$? Indication : distinguer les cas en comparant a et 2 ainsi que b et 2.