DEVOIR SURVEILLE (Deuxième session)

La calculatrice n'est pas autorisée, ainsi que les documents de cours et de TD. Chaque réponse doit être justifiée. Un soin particulier devra être apporté à la rédaction.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traité dans un ordre quelconque.

EXERCICE 1

Calculer les développements limités suivants :

1. $\dfrac{\ln(1+x)}{\cos(x)}$ à l'ordre 4 en 0.
2. $\sqrt{x(2+x)}e^{1/x}$ à l'ordre -1 en $+\infty$.

EXERCICE 2

Etudier la nature de la série de terme général u_n :

1. $u_n = \dfrac{n^2}{n^3+1}$.
2. $u_n = \dfrac{1}{\ln(n)^n}$.
3. $u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$.

EXERCICE 3

On considère la fonction 2π-périodique impaire définie par $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$ si $0 < x < \pi$, $f(0) = f(\pi) = 0$.

1. Représenter le graphe de la fonction f.
2. Etudier la convergence de la série de Fourier de f.
3. Calculer les coefficients de Fourier de f ainsi que la série de Fourier de f.
4. En déduire la somme suivante : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

EXERCICE 4

Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_\gamma \frac{x^2dx}{x^2+y^2+2}$, où γ est le quart de cercle $x^2+y^2=1$, $x, y \geq 0$, parcouru dans le sens positif.

Développements limités

Développements limités en 0 :

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x), \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x), \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x), \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x), \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + \ldots + x^n + x^n\varepsilon(x). \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

Séries de Fourier

Soit f une fonction 2π-périodique.

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt,\ a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt,\ b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt.$$

Si de plus f est paire :

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt,\ a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)dt,\ b_n(f) = 0.$$

Si de plus f est impaire :

$$a_0(f) = 0,\ a_n(f) = 0,\ b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)dt.$$

La série de Fourier de f est :

$$Sf(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)).$$

Formule de Parseval :

$$\frac{|a_0(f)|^2}{4} + \sum_{n\geq 1}\frac{|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt.$$

Géométrie différentielle

Soit $\omega = fdx + gdy$ une forme différentielle de degré un définie sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Soit un arc paramétré $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega, \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$. L'intégrale curviligne de ω le long de γ est :

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \left(f(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\gamma_1'(t) + g(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\gamma_2'(t)\right) dt.$$