DEVOIR SURVEILLE

La calculatrice n'est pas autorisée, ainsi que les documents de cours et de TD. Chaque réponse doit être justifiée. Un soin particulier devra être apporté à la rédaction.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traité dans un ordre quelconque.

EXERCICE 1

Calculer les développements limités suivants :

1. $\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$ en 0 à l'ordre 4.

   Solution : $\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \frac{-x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4)$.
2. $e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+x+1}$ en $+\infty$ à l'ordre -2.

   Solution : $e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+x+1} = x + \dfrac{3}{2} + \dfrac{11}{8x} + \dfrac{7}{16x^2} + o(1/x^2)$.
3. $\frac{\sin(x)-1}{2+\cos(x)}$ en 0 à l'ordre 2.

   Solution : $\frac{\sin(x)-1}{2+\cos(x)} = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$.

EXERCICE 2

Etudier la nature de la série de terme général u_n :

1. $u_n = \frac{n+1}{n^3-7}$.
2. $u_n = \frac{n+1}{n^2-7}$.
3. $u_n = \frac{n^{10000}}{n!}$.
4. $u_n = \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$.

EXERCICE 2

Soit f la fonction paire 2π-périodique définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

1. Représenter le graphe de la fonction f.
2. Etudier la convergence de la série de Fourier de f.
3. Calculer les coefficients de Fourier de f ainsi que la série de Fourier de f.
4. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

EXERCICE 4

On considère la 1-forme différentielle $\omega = (y^3 - 6xy^2)dx + (3xy^2 - 6x^2y)dy$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

1. ω est-elle fermée sur $\mathbb{R}^2$?
2. ω est-elle exacte sur $\mathbb{R}^2$?
3. Déterminer une primitive A de ω sur $\mathbb{R}^2$.
4. Notons $A_1 = (1,0)$, $A_2 = (1,1)$, $A_3 = (-1,1)$ et $A_4 = (-1,0)$. On considère γ le chemin orienté reliant A_1 à A_2, A_2 à A_3, A_3 à A_4.

   Dessiner γ, et en donner une paramétrisation.
5. Calculer de deux manières différentes l'intégrale curviligne de ω le long du chemin γ (en utilisant la formule du cours, puis en utilisant la primitive A de ω)

Développements limités

Développements limités en 0 :

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x), \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x), \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x), \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x), \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + \ldots + x^n + x^n\varepsilon(x). \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

Séries de Fourier

Soit f une fonction 2π-périodique.

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt,\ a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt,\ b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt.$$

Si de plus f est paire :

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt,\ a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)dt,\ b_n(f) = 0.$$

Si de plus f est impaire :

$$a_0(f) = 0,\ a_n(f) = 0,\ b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)dt.$$

La série de Fourier de f est :

$$Sf(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)).$$

Formule de Parseval :

$$\frac{|a_0(f)|^2}{4} + \sum_{n\geq 1}\frac{|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt.$$

Géométrie différentielle

Soit $\omega = fdx + gdy$ une forme différentielle de degré un définie sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Soit un arc paramétré $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega, \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$. L'intégrale curviligne de ω le long de γ est :

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \left(f(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\gamma_1'(t) + g(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\gamma_2'(t)\right)dt.$$